

Cours de Seconde

Année 2026

MAURER Stéfan

ALGEBRE

1	RÈGLES DE CALCUL FONDAMENTALES	2
2	ENSEMBLES DE NOMBRES	4
3	ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{N}$	5
4	LES NOMBRES RÉELS	7
5	RACINE CARRÉE ET VALEUR ABSOLUE	9
6	ÉQUATIONS DU 1 ^{er} DEGRÉ À UNE INCONNUE	11
7	INÉQUATIONS DU 1 ^{er} DEGRÉ À UNE INCONNUE	14
8	SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES	16
9	ÉQUATIONS DU 2 nd DEGRÉ À UNE INCONNUE	17
10	ÉQUATIONS QUOTIENT À UNE INCONNUE	19
11	INÉQUATIONS DU 2 nd DEGRÉ À UNE INCONNUE	20
12	INÉQUATIONS QUOTIENT À UNE INCONNUE	22

ANALYSE

13	GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS	23
14	LA FONCTION AFFINE	27
15	LA FONCTION CARRÉ	29
16	LA FONCTION CUBE	30
17	LA FONCTION INVERSE	31
18	LA FONCTION RACINE CARRÉE	32

GEOMETRIE

19	RAPPELS ET COMPLÉMENTS EN GÉOMÉTRIE	33
20	COORDONNÉES ET DISTANCE	41
21	GÉNÉRALITÉS SUR LES VECTEURS	43
22	CALCUL VECTORIEL	45
23	TRANSFORMATIONS DU PLAN	47
24	DROITES DU PLAN	49

STATISTIQUES & PROBABILITES

25	POURCENTAGES	52
26	TAUX D'ÉVOLUTION	53
27	SÉRIES STATISTIQUES À UNE VARIABLE	55
28	ÉVÈNEMENT ET LANGAGE ENSEMBLISTE	59
29	CALCUL DE PROBABILITÉS	61

RÈGLES DE CALCUL FONDAMENTALES

I - La soustraction

Définition 1 : On appelle **opposé** du nombre a le nombre noté $-a$ tel que : $a + (-a) = 0$.

Remarque : Dans ce cas, le signe "-" n'est pas la marque d'un nombre négatif. En effet, d'après la définition, l'opposé du nombre -2 est le nombre $-(-2)$. Or, $-2 + 2 = 0$ donc on en déduit que $-(-2) = 2$ est un nombre positif.

Définition 2 : On appelle **soustraction** de a par b l'opération qui additionne le nombre a et l'opposé du nombre b .

$$a - b = a + (-b)$$

Application : Regrouper des termes afin de réduire une expression.

$$\begin{aligned} 5 + 3x - 6 - 5x &= 5 + 3x + (-6) + (-5x) \\ &= 3x + (-5x) + 5 + (-6) \\ &= -2x + (-1) \\ &= -2x - 1 \end{aligned}$$

II - La multiplication

Propriété 1 : La multiplication est prioritaire sur l'addition (et la soustraction).

- La multiplication est distributive sur l'addition (et la soustraction).
- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b = ka + kb$
- $(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Application : Développer et réduire une expression.

$$\begin{aligned} 3x + 5 - 2(x + 1) &= 3x + 5 + (-2) \times (x + 1) \\ &= 3x + 5 + (-2) \times x + (-2) \times 1 \\ &= 3x + 5 + (-2x) + (-2) \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - (2x + 1) &= x + (-1) \times (2x + 1) \\ &= x + (-1) \times 2x + (-1) \times 1 \\ &= x + (-2x) + (-1) \\ &= -1x + (-1) \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

III - La division

Définition 3 : On appelle **inverse** du nombre $a \neq 0$ le nombre noté $\frac{1}{a}$ tel que : $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Remarque : L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) est le nombre $\frac{b}{a}$. En effet, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$.

Propriété 2 : Pour tout nombre a , $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

Conséquence : Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

Démonstration : Démontrer que 0 n'a pas d'inverse.

Raisonnement par l'absurde : Si $\frac{1}{0}$ existe alors, d'après la définition 3, $0 \times \frac{1}{0} = 1$.

Or, d'après la propriété 2, pour tout nombre a , $0 \times a = 0$ donc, en particulier, si $a = \frac{1}{0}$ on obtient $0 \times \frac{1}{0} = 0$.
Donc on obtient que $0 = 1$. Ce résultat est absurde donc l'hypothèse de départ est fausse.

Conclusion : $\frac{1}{0}$ n'existe pas.

Définition 4 : On appelle **division** de a par b ($b \neq 0$), l'opération qui multiplie le nombre a et l'inverse du nombre non nul b .

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

Conséquence : Le nombre 0 n'a pas d'inverse donc on ne peut pas diviser par 0.

IV - Les fractions

Propriété 3 :

- Pour tout nombre $a \neq 0$, $-\frac{1}{a} = \frac{-1}{a} = \frac{1}{-a}$
- Pour tous nombres $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$
- Pour tous nombres $b \neq 0$, $d \neq 0$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$
- Pour tous nombres $b \neq 0$, $d \neq 0$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. En particulier, $a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$
- Pour tous nombres $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

V - Les puissances

Définition 5 : Pour tout nombre a différent de 0 et tout entier naturel n , on définit le nombre a^n :

Si $n = 0$ alors $a^0 = 1$

Si $n = 1$ alors $a^1 = a$

Si $n > 1$ alors $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs a)

Convention : L'exposant est toujours prioritaire sur les autres opérateurs.

Définition 6 : Pour tout nombre a différent de 0 et tout entier relatif n , on définit le nombre a^{-n} :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

C'est-à-dire que a^{-n} est l'inverse de a^n .

Propriété 4 : Pour tous nombres a et b différents de 0, pour tous entiers relatifs m et n :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

ENSEMBLES DE NOMBRES

En langage mathématique, un ensemble de nombres se note à l'aide d'accolades (ou de crochets lorsqu'il s'agit d'un intervalle comme on le verra dans la suite de ce cours).

Si l'ensemble a un nom alors les accolades sont précédées du nom de l'ensemble suivi du symbole « = ».

Définition 1 : On appelle $\mathbb{N}$ **l'ensemble des entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Remarque : Les 3 points de suspension indiquent que l'ensemble contient une infinité de nombres qui continuent la même suite logique (dans la définition 1, pour passer d'un nombre au suivant, on ajoute 1).

Définition 2 : On appelle $\mathbb{Z}$ **l'ensemble des entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Définition 3 : On appelle $\mathbb{D}$ **l'ensemble des nombres décimaux** : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^p}, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$.

Application : Écrire un nombre décimal sous forme de fraction décimale.

$$1,732 = \frac{1,732}{1} = \frac{1732}{1000} = \frac{1732}{10^3}$$

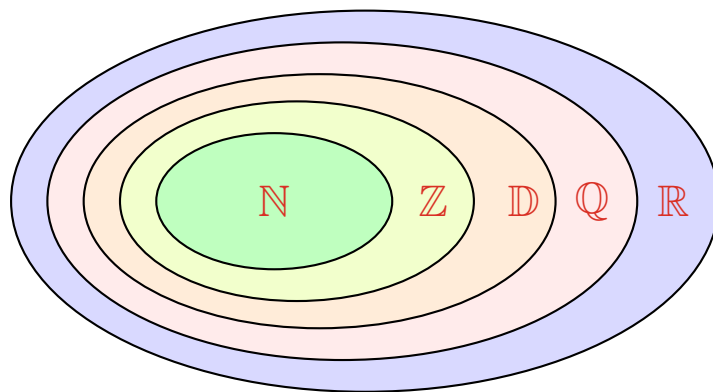
Remarque : La définition 3 précise qu'un nombre décimal a un nombre fini de décimales.

Définition 4 : On appelle $\mathbb{Q}$ **l'ensemble des nombres rationnels** : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d}, n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}, d \neq 0 \right\}$.

Remarque : Les nombres rationnels qui ne sont pas des décimaux, écrits sous « forme décimale », ont un nombre infini de décimales. Ces décimales suivent cependant certaines règles c'est-à-dire que l'on retrouve périodiquement les mêmes chiffres.

$$\frac{1}{3} = 0,33\dots \quad \frac{2}{11} = 0,1818\dots \quad \frac{3}{7} = 0,428571428571\dots$$

Définition 5 : On appelle $\mathbb{R}$ **l'ensemble des nombres réels**. $\mathbb{R} = \{x, x^2 \geq 0\}$



Remarque : Les nombres réels non rationnels sont appelés **irrationnels** ; $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.

Notation : Si un ensemble E est contenu dans un ensemble F , on dit que **E est inclus dans F** , et on note : $E \subset F$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- Pour indiquer qu'un nombre **appartient à un ensemble**, on utilise $\in$: $5 \in \mathbb{N}$, $-12 \in \mathbb{Z}$.
- Pour indiquer qu'un nombre **n'appartient pas à un ensemble**, on utilise $\notin$: $-6 \notin \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{N}$

Définition 1 : Effectuer la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier strictement positif b , c'est trouver les deux entiers naturels appelés quotient q et reste r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

Définition 2 : On dit que l'entier naturel b est un diviseur de l'entier naturel a lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à zéro, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que :

$$a = b \times q$$

Vocabulaire : Les phrases suivantes ont la même signification.

- b est un diviseur de a
- b divise a
- a est un multiple de b
- a est divisible par b

Démonstration : Démontrer que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Raisonnement par l'absurde.

Si $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ alors il existe un entier relatif n et un entier naturel non nul p tels que $\frac{1}{3} = \frac{n}{10^p}$.

Donc $3n = 10^p = 10 \times 10 \times \dots \times 10$ (p facteurs)

Donc 3 est un diviseur de 10^p .

Ce résultat est absurde donc l'hypothèse de départ est fausse.

Donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Définition 3 : On dit qu'un entier naturel est premier lorsqu'il a exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Définition 4 : On dit que des entiers naturels sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Définition 5 : On dit qu'un entier naturel a est pair lorsqu'il est divisible par 2, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que : $a = 2 \times q$

Définition 6 : On dit qu'un nombre naturel a est impair lorsqu'il n'est pas divisible par 2, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que : $a = 2 \times q + 1$

Propriété 1 : Soit a un entier naturel ;

a^2 est pair (resp. impair) si et seulement si a est pair (resp. impair).

Démonstration :

- Si a est pair alors il existe un entier naturel q tel que $a = 2 \times q$.
Donc $a^2 = (2 \times q)^2 = 2^2 \times q^2 = 2 \times (2q^2)$ donc a^2 est pair.
- Pour démontrer que si a^2 est pair alors a est pair, on utilise la contraposée de cette proposition.
En logique, [si a^2 est pair alors a est pair] est équivalente à [si a n'est pas pair alors a^2 n'est pas pair].
Si a n'est pas pair alors il est impair donc il existe un entier naturel q tel que $a = 2 \times q + 1$.
Donc $a^2 = (2 \times q + 1)^2 = (2q + 1)(2q + 1) = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1$ donc a^2 est impair.
Donc a^2 n'est pas pair.

Application : Trouver tous les diviseurs d'un nombre

Exemple : Trouver tous les diviseurs de 60.

$$60 = 1 \times 60$$

$$60 = 2 \times 30$$

$$60 = 3 \times 20$$

$$60 = 4 \times 15$$

$$60 = 5 \times 12$$

$$60 = 6 \times 10$$

La liste des diviseurs de 60 est donc : $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60\}$.

Application : Décomposer un nombre en facteurs premiers

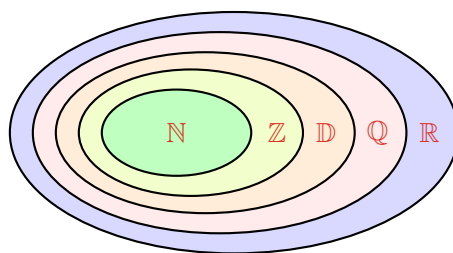
Exemple : Décomposer le nombre 60 en produit de facteurs premiers.

60		2
30		2
15		3
5		5
1		

On a donc : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

I - Ensemble des nombres réels

Définition 1 : On appelle $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R} = \{x, x^2 \geq 0\}$



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarque : Les nombres réels non rationnels sont appelés irrationnels; $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.

Démonstration : Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnement par l'absurde.

Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{2} = \frac{n}{d}$ avec $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}, d \neq 0$. De plus, on peut choisir n et d premiers entre eux de façon à ce que la fraction $\frac{n}{d}$ soit irréductible.

Si $\sqrt{2} = \frac{n}{d}$ alors $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{n}{d}\right)^2$ donc $2 = \frac{n^2}{d^2}$ donc $n^2 = 2 \times d^2$ donc n^2 est pair donc n est pair.

Donc il existe un entier naturel q tel que $n = 2 \times q$ d'où $n^2 = (2 \times q)^2 = 4 \times q^2$.

Or $n^2 = 2 \times d^2$ donc $2 \times d^2 = 4 \times q^2$ donc $d^2 = 2 \times q^2$ donc d^2 est pair donc d est pair.

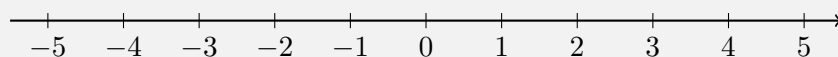
Donc il existe un entier naturel q' différent de zéro, tel que $d = 2 \times q'$.

Donc $\frac{n}{d} = \frac{2 \times q}{2 \times q'}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse faite au départ.

Donc on ne peut pas trouver 2 entiers naturels n et d tels que $\sqrt{2} = \frac{n}{d}$ avec $n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}, d \neq 0$.

Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Propriété 1 : Tout nombre réel est associé à l'abscisse d'un point de la droite numérique et réciproquement.



Méthode : Encadrer un réel avec deux nombres décimaux

- Encadrer $\sqrt{2}$ avec deux nombres décimaux à 10^{-3} près.

1 - On commence par évaluer $\sqrt{2}$ à la calculatrice; on obtient $\sqrt{2} \approx 1,414214$.

2 - Pour avoir un encadrement à 10^{-3} près, il faut encadrer $\sqrt{2}$ avec deux décimaux ayant 3 décimales dont la différence est inférieure ou égale à 10^{-3} .

On tronque la valeur obtenue à 3 décimales; on obtient $\sqrt{2} \geq 1,414$.

On ajoute 10^{-3} c'est à dire 0,001 et on obtient $\sqrt{2} \leq 1,415$.

3 - On donne l'encadrement cherché : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$.

- Encadrer $-\sqrt{3}$ avec deux nombres décimaux à 10^{-2} près.

1 - On commence par évaluer $-\sqrt{3}$ à la calculatrice; on obtient $-\sqrt{3} \approx -1,732051$.

2 - Pour avoir un encadrement à 10^{-2} près, il faut encadrer $-\sqrt{3}$ avec deux décimaux ayant 2 décimales dont la différence est inférieure ou égale à 10^{-2} .

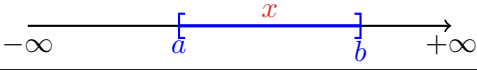
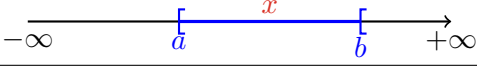
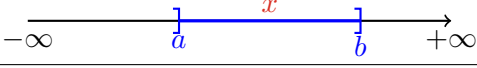
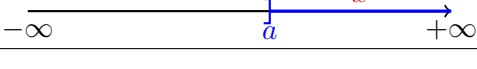
On tronque la valeur obtenue à 2 décimales; on obtient $-\sqrt{3} \leq -1,73$.

On enlève 10^{-2} c'est à dire 0,01 et on obtient $-\sqrt{3} \geq -1,74$.

3 - On donne l'encadrement cherché : $-1,74 \leq -\sqrt{3} \leq -1,73$.

II - Les intervalles

Un intervalle est un ensemble de nombres limité par 2 bornes, qui sont des nombres, $+\infty$ ou $-\infty$.
On étudie les différents cas dans le tableau ci-dessous ($a \leq b$).

Intervalle	Inégalités	Droite numérique
$x \in [a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$x \in]a; b[$	$a < x < b$	
$x \in [a; b[$	$a \leq x < b$	
$x \in]a; b]$	$a < x \leq b$	
$x \in]-\infty; a]$	$x \leq a$	
$x \in]a; +\infty[$	$x > a$	

Notation : Un ensemble de nombres peut être composé de la réunion de plusieurs intervalles.

Dans ce cas, on utilise le symbole $\cup$ qui signifie **ou**.

Exemples :

- $x \in [-1; 2] \cup]3; 4]$ signifie que $-1 \leq x \leq 2$ **ou** $3 < x \leq 4$.
- $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ signifie que $x < 0$ **ou** $x > 0$.

Un ensemble de nombres peut être composé de l'intersection de plusieurs intervalles.

Dans ce cas, on utilise le symbole $\cap$ qui signifie **et**.

Exemple : $x \in [-1; 3] \cap]2; 4]$ signifie que $-1 \leq x \leq 3$ **et** $2 < x \leq 4$ donc $x \in]2; 3]$.

RACINE CARRÉE ET VALEUR ABSOLUE

I - Les racines carrées

Définition 1 : On appelle racine carrée du nombre a supérieur ou égal à zéro, le nombre positif noté $\sqrt{a}$ tel que :
 $(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$

Propriété 1 : Pour tous nombres a et b positifs ou nuls :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} &= \sqrt{a \times b} & \bullet \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) & \bullet \quad \sqrt{a^2} &= a \quad (a \geq 0) \end{aligned}$$

Application : Simplifier une racine carrée

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{48} &= \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ \bullet \quad \sqrt{\frac{7}{25}} &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{7}}{5} \end{aligned}$$

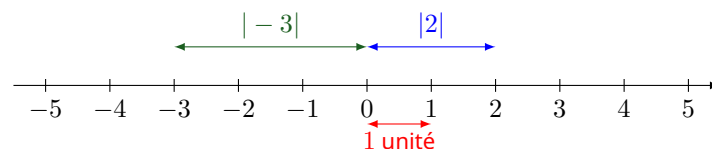
II - Valeur absolue

Définition 2 : On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel x la distance entre 0 et x sur la droite numérique. On la note $|x|$.

Propriété 2 : Pour tout réel x :

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple explicatif :



- La distance entre 0 et 2 est égale à 2 unités donc $|2| = 2$.
Donc si $x \geq 0$ alors $|x| = x$.
- La distance entre 0 et -3 est égale à 3 unités donc $|-3| = 3$.
Or l'opposé de -3 se note $-(-3)$ et est égal à 3. Donc $|-3| = 3 = -(-3)$.
Donc si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Propriété 3 : Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$

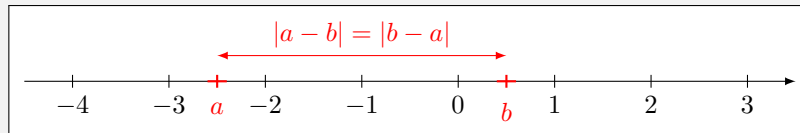
Exemple explicatif :

- $\sqrt{2^2} = \sqrt{4}$. Par définition, $(\sqrt{4})^2 = 4 = 2^2$ donc, comme $\sqrt{4} \geq 0$ et $2 \geq 0$, on en déduit que $\sqrt{4} = 2$.
Donc $\sqrt{2^2} = 2 = |2|$.
- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4}$. Par définition, $(\sqrt{4})^2 = 4 = 2^2$ donc, comme $\sqrt{4} \geq 0$ et $2 \geq 0$, on en déduit que $\sqrt{4} = 2$.
Donc $\sqrt{(-2)^2} = 2 = |-2|$.

Démonstration :

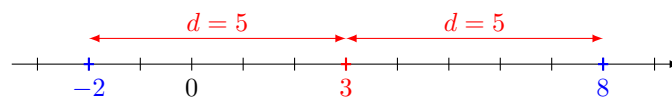
- Si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{x \times x} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x = |x|$.
- Si $x < 0$ alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x) \times (-x)} = (\sqrt{-x})^2 = -x = |x|$.

Propriété 4 : La distance entre 2 nombres a et b est égale à $|a - b|$.



Application : Résoudre une équation avec valeur absolue $|x - 3| = 5$

D'après la propriété précédente, l'équation $|x - 3| = 5$ signifie que la **distance** entre les nombres x et 3 est égale à 5. Sur la droite numérique, on cherche donc les points situés à une distance de 5 du point d'abscisse 3.

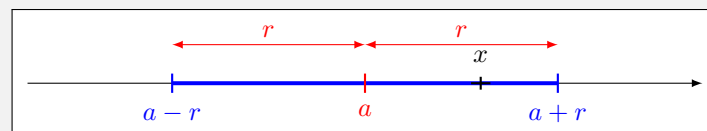


On trouve graphiquement deux solutions : $3 - 5 = -2$ et $3 + 5 = 8$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{-2 ; 8\}$.

Propriété 5 : Soit a et r des nombres réels, $r > 0$;

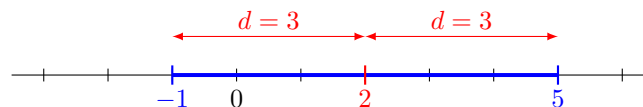
$$x \in [a - r ; a + r] \iff |x - a| \leq r$$

$$x \in]a - r ; a + r[\iff |x - a| < r$$



Application : Résoudre une inéquation avec valeur absolue $|x - 2| \leq 3$

Cette inéquation se traduit par : la distance entre x et 2 est inférieure ou égale à 3.



D'après la propriété 5, cela correspond à l'intervalle $[2 - 3 ; 2 + 3]$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S = [-1 ; 5]$.

ÉQUATIONS DU 1^{er} DEGRÉ À UNE INCONNUE

Une équation à une inconnue est une égalité qui comporte un nombre inconnu, que l'on représente par une lettre (x , t , y , ...).

I - Test d'une solution éventuelle

Résoudre une équation dans un ensemble I, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue contenues dans I qui vérifie l'égalité.

Méthode : Tester si un nombre est solution d'une équation

Exemple 1 : Le nombre -1 est-il solution de l'équation $5x - 3 = 7x + 2$?

$$\text{Si } x = -1 \text{ alors } \begin{cases} 5x - 3 = 5 \times (-1) - 3 = -8 \\ 7x + 2 = 7 \times (-1) + 2 = -5 \end{cases} \quad \text{donc si } x = -1 \text{ alors } 5x - 3 \neq 7x + 2$$

Donc -1 n'est pas une solution de l'équation.

Exemple 2 : Le nombre $-\frac{5}{2}$ est-il solution de l'équation $5x - 3 = 7x + 2$?

$$\text{Si } x = -\frac{5}{2} \text{ alors } \begin{cases} 5x - 3 = 5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 3 = -\frac{25}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{31}{2} \\ 7x + 2 = 7 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 = -\frac{35}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{31}{2} \end{cases} \quad \text{donc si } x = -\frac{5}{2} \text{ alors } 5x - 3 = 7x + 2$$

Donc $-\frac{5}{2}$ est une solution de l'équation.

II - Règle d'addition

Propriété 1 : Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres de l'égalité.

Pour tous réels a, b, c , si $a = b$ alors $a + c = b + c$

Application : Regrouper des nombres du même côté d'une égalité.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} x - 1 &= 1 \\ x + (-1) &= 1 \\ x + \cancel{(-1)} + 1 &= 1 + 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} 3x &= 2x + 1 \\ 3x + \cancel{(-2x)} &= \cancel{2x} + \cancel{(-2x)} + 1 \\ 1x &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

III - Règle de multiplication

Propriété 2 : Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie par un même nombre les deux membres de l'égalité.

Pour tous réels a, b, c , si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$

Application : Exprimer la valeur de x .

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} 3x &= 5 \\ 3 \times x &= 5 \\ \frac{1}{3} \times 3 \times x &= \frac{1}{3} \times 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x &= 2 \\ -\frac{1}{4} \times x &= 2 \\ \cancel{-4} \times \left(\cancel{-\frac{1}{4}}\right) \times x &= \cancel{-4} \times 2 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Application : Simplifier la résolution d'une équation avec fractions.

Exemple : Trouver une équation équivalente à $\frac{1}{3}x - 2 = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ sans fraction.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x - 2 &= -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \\ \frac{1 \times 5}{3 \times 5}x - \frac{2 \times 15}{1 \times 15} &= -\frac{2 \times 3}{5 \times 3}x + \frac{1 \times 3}{5 \times 3} \\ \frac{5x - 30}{15} &= \frac{-6x + 3}{15} \\ \cancel{15} \times \frac{5x - 30}{\cancel{15}} &= \cancel{15} \times \frac{-6x + 3}{\cancel{15}} \\ 5x - 30 &= -6x + 3\end{aligned}$$

IV - Résolution d'une équation du 1^{er} degré à une inconnue

Méthode : Résolution d'une équation dans $\mathbb{R}$

$$2x + \frac{7}{3} = x \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

On se ramène à une équation sans fraction.

$$\begin{aligned}\frac{2x \times 6}{1 \times 6} + \frac{7 \times 2}{3 \times 2} &= x \frac{\sqrt{3} \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 6}{1 \times 6} \\ \cancel{6} \times \frac{12x + 14}{\cancel{6}} &= \cancel{6} \times \frac{3\sqrt{3}x - 6}{\cancel{6}} \\ 12x + 14 &= 3\sqrt{3}x - 6\end{aligned}$$

On regroupe les "x" d'un côté et les nombres de l'autre.

$$\begin{aligned}12x + (-3\sqrt{3}x) + \cancel{14} + (-14) &= \cancel{3\sqrt{3}x} + (-3\sqrt{3}x) - 6 + (-14) \\ 12x - 3\sqrt{3}x &= -20\end{aligned}$$

On réduit l'expression ou on met "x" en facteur puis on déduit l'expression de "x".

$$\begin{aligned}(12 - 3\sqrt{3})x &= -20 \quad (12 - 3\sqrt{3} \neq 0 \text{ donc il a un inverse}) \\ \frac{1}{12 - 3\sqrt{3}} \times \cancel{(12 - 3\sqrt{3})}x &= \frac{1}{12 - 3\sqrt{3}} \times (-20) \quad \text{d'où } x = \frac{-20}{12 - 3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

On donne l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$

$$S = \left\{ \frac{-20}{12 - 3\sqrt{3}} \right\}$$

Propriété 3 : Une équation du 1^{er} degré à une inconnue a 0 solution ou bien 1 solution ou bien, tout nombre réel est solution de l'équation.

Méthode : Les différentes situations à distinguer

Exemple 1 : L'équation $3x = 2x + 1$ a 1 comme unique solution dans $\mathbb{R}$. On note $S = \{1\}$.

Exemple 2 : L'équation $3x = 3x + 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On note $S = \emptyset$.

Exemple 3 : L'équation $3x + 1 = 3x + 1$ admet tout nombre réel comme solution dans $\mathbb{R}$. On note $S = \mathbb{R}$.

Démonstration :

Une équation du 1^{er} degré à une inconnue x est de la forme $ax + b = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $a = 0$ alors l'équation s'écrit $b = 0$ donc elle est indépendante de x .
 - Si $b = 0$ alors l'équation s'écrit $0 = 0$; cette égalité est toujours vraie donc $S = \mathbb{R}$.
 - Si $b \neq 0$ alors l'égalité $b = 0$ est toujours fausse donc $S = \emptyset$.
- Si $a \neq 0$ alors l'équation s'écrit $ax = -b$ puis $x = \frac{-b}{a}$ donc $\frac{-b}{a}$ est solution de l'équation.

Unicité : Supposons que l'équation ait 2 solutions x_1 et x_2 alors $ax_1 + b = 0$ et $ax_2 + b = 0$.

$$\text{D'où } ax_1 + b = ax_2 + b \iff ax_1 = ax_2 \iff a(x_1 - x_2) = 0 \text{ or } a \neq 0 \text{ donc } x_1 - x_2 = 0 \text{ soit } x_1 = x_2$$

Donc l'équation a une solution unique.

INÉQUATIONS DU 1^{er} DEGRÉ À UNE INCONNUE

Une inéquation à une inconnue est une inégalité qui comporte un nombre inconnu, que l'on représente par une lettre (x , t , y , ...).

I - Test d'une solution éventuelle

Résoudre une inéquation dans un ensemble I, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue contenues dans I qui vérifie l'inégalité.

Méthode : Tester si un nombre est solution d'une inéquation

Exemple 1 : Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation $5x - 3 > 7x + 2$?

$$\text{Si } x = -2 \text{ alors } \begin{cases} 5x - 3 = 5 \times (-2) - 3 = -13 \\ 7x + 2 = 7 \times (-2) + 2 = -12 \end{cases} \quad \text{donc si } x = -2 \text{ alors } 5x - 3 < 7x + 2$$

Donc -2 n'est pas une solution de l'inéquation.

Exemple 2 : Le nombre -3 est-il solution de l'inéquation $5x - 3 > 7x + 2$?

$$\text{Si } x = -3 \text{ alors } \begin{cases} 5x - 3 = 5 \times (-3) - 3 = -15 - 3 = -18 \\ 7x + 2 = 7 \times (-3) + 2 = -21 + 2 = -19 \end{cases} \quad \text{donc si } x = -3 \text{ alors } 5x - 3 > 7x + 2$$

Donc -3 est solution de l'inéquation.

II - Règle d'addition

Remarque :

- La règle d'addition s'appliquant aux égalités et aux inégalités strictes, elle s'applique aussi aux inégalités au sens large.
- La règle d'addition des inégalités est utilisée pour regrouper des nombres du même côté d'une inégalité.

Propriété 4 : Une inégalité reste vraie lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux membres de l'inégalité.

Pour tous réels a, b, c , si $a < b$ alors $a + c < b + c$

III - Règle de multiplication

Propriété 5 :

- Une inégalité reste vraie lorsqu'on multiplie par un même nombre **strictement positif** les deux membres de l'inégalité.

Pour tous réels a, b, c , si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$

- Une inégalité change de sens lorsqu'on multiplie par un même nombre **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité.

Pour tous réels a, b, c , si $a < b$ et $c < 0$ alors $a \times c > b \times c$

Application : Exprimer la valeur de x .

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} 3x &< 5 \\ \frac{1}{3} \times 3 \times x &< \frac{1}{3} \times 5 \quad \text{car } \frac{1}{3} > 0 \\ x &< \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x &\leq 2 \\ -4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times x &\geq -4 \times 2 \quad \text{car } -4 < 0 \\ x &\geq -8 \end{aligned}$$

IV - Résolution d'une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue

Méthode : Résolution d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

La méthode de résolution d'une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue est identique à la méthode de résolution d'une équation du 1^{er} degré à une inconnue.

$$2x + 1 \geq \pi x - 1$$

On regroupe les " x " d'un côté et les nombres de l'autre puis on réduit ou on met " x " en facteur.

$$2x + (-\pi x) + 1 + (-1) \geq \pi x + (-\pi x) - 1 + (-1)$$

$$2x - \pi x \geq -2$$

$$(2 - \pi)x \geq -2$$

On déduit l'expression de " x ".

($2 - \pi < 0$ donc on change le sens de l'inégalité)

$$\frac{1}{2 - \pi} \times (2 - \pi)x \leq \frac{1}{2 - \pi} \times (-2)$$

$$x \leq \frac{-2}{2 - \pi}$$



On donne l'ensemble des solutions de l'inéquation dans $\mathbb{R}$ sous forme d'intervalle :

$$S = \left] -\infty ; \frac{-2}{2 - \pi} \right]$$

SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES

I - Méthode de résolution par combinaison

On multiplie les 2 membres de chaque équation du système par un nombre de telle façon que lorsqu'on additionne membre à membre les 2 équations du système, on élimine une des deux inconnues.

Méthode : Résoudre un système par combinaison

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} 2x - 5y = 12 & (E_1) \\ 3x + 4y = -5 & (E_2) \end{cases}$$

On choisit, par exemple, d'éliminer l'inconnue y :

On multiplie (E_1) par 4, et on multiplie (E_2) par 5. On obtient :

$$\begin{cases} 4 \times 2x - 4 \times 5y = 4 \times 12 \\ 5 \times 3x + 5 \times 4y = -5 \times 5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 8x - 20y = 48 \\ 15x + 20y = -25 \end{cases}$$

On additionne les 2 équations membre à membre. On résout l'équation obtenue. On obtient :

$$8x + 15x - 20y + 20y = 48 - 25 \quad \text{donc} \quad 23x = 23$$

$$x = \frac{23}{23} = 1$$

On remplace x par sa valeur dans (E_1) ou (E_2) . Avec (E_1) , on obtient :

$$2 \times 1 - 5y = 12 \quad \text{donc} \quad -5y = 10$$

$$y = \frac{10}{-5} = -2$$

$$\text{donc} \quad S = \{(1; -2)\}$$

II - Méthode de résolution par substitution

On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une des 2 équations du système puis on remplace cette inconnue par cette valeur dans l'autre équation.

Cette méthode sera utilisée de préférence lorsqu'une des 2 inconnues a un coefficient 1 ou -1 .

Méthode : Résoudre un système par substitution

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} x + 3y = 2 & (E_1) \\ 2x - y = -1 & (E_2) \end{cases}$$

On choisit, par exemple, d'exprimer x en fonction de y dans (E_1) puis on remplace x dans (E_2) par cette valeur. On obtient :

$$\begin{cases} x = 2 - 3y \\ 2(2 - 3y) - y = -1 \end{cases}$$

On résout l'équation d'inconnue y obtenue. On obtient :

$$2 \times 2 - 2 \times 3y - y = -1 \quad \text{donc} \quad 4 - 7y = -1 \quad \text{donc} \quad -7y = -5$$

$$y = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

On remplace y par sa valeur dans (E_1) . On obtient :

$$x + 3 \times \frac{5}{7} = 2$$

$$x = 2 - \frac{15}{7}$$

$$x = \frac{14}{7} - \frac{15}{7} = \frac{-1}{7}$$

$$\text{donc} \quad S = \left\{ \left(-\frac{1}{7}; \frac{5}{7} \right) \right\}$$

ÉQUATIONS DU 2nd DEGRÉ À UNE INCONNUE

I - Résolution algébrique d'une équation produit

Propriété 1 : Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$a, b \in \mathbb{R}, \text{ si } a \times b = 0 \text{ alors } a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Application : Résoudre une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.

$$\text{Résolution de l'équation } (x + 5)(3x - 2) = 0$$

$$\text{Si } (x + 5)(3x - 2) = 0 \text{ alors } x + 5 = 0 \text{ ou } 3x - 2 = 0$$

$$\text{soit } x = -5 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ -5; \frac{2}{3} \right\}$$

II - Résolution algébrique d'une équation du 2nd degré

Une équation du 2nd degré à une inconnue est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

En effet, si $a = 0$, on obtient une équation du 1^{er} degré à une inconnue.

Lors de la résolution d'une telle équation, l'objectif est de se ramener à une équation produit de façon à utiliser la propriété 1 pour déterminer l'ensemble des solutions.

1 - Factoriser en utilisant une égalité remarquable

Propriété 2 : Soit a, b, c des réels;

Forme développée Forme factorisée

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Méthode : Résolution d'une équation du 2nd degré

$$\text{Résoudre l'équation } (x - 1)^2 = 2(x - 1) \text{ dans } \mathbb{R}$$

1 - On regroupe tous les termes dans un même membre

$$(x - 1)^2 - 2(x - 1) = 0$$

2 - On factorise à l'aide d'une égalité remarquable

$$(x - 1) \times (x - 1) - 2 \times (x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \times [(x - 1) - 2] = 0$$

$$(x - 1) \times (x - 1 - 2) = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

3 - On applique la propriété 1

$$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

4 - On donne l'ensemble des solutions

$$S = \{1; 3\}$$

Méthode : Résoudre une équation du type $x^2 = a$, a étant un réel donné.

- Si $a < 0$ alors $S = \emptyset$ (le carré d'un nombre est toujours positif ou nul).
- Si $a = 0$ alors $S = \{0\}$.
- Si $a > 0$ alors on utilise la méthode générale étudiée auparavant :

$$\begin{aligned}x^2 &= a \\x^2 - a &= 0 \\x^2 - (\sqrt{a})^2 &= 0 \\(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) &= 0 \\x + \sqrt{a} &= 0 \quad \text{ou} \quad x - \sqrt{a} = 0 \\x &= -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a} \\S &= \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}\end{aligned}$$

Programme en Python : résoudre une équation du type $x^2 = a$

```
from math import *

print("Résoudre une équation du type x*x = a")
a = float(input("entrer a = "))

if a < 0:
    print("Pas de solution")
elif a == 0:
    print("S = {0}")
else:
    x1 = -sqrt(a)
    x2 = sqrt(a)
    print("S = {", x1, ";", x2, "}")
```

ÉQUATIONS QUOTIENT À UNE INCONNUE

On appelle équation quotient une équation contenant des fractions où l'inconnue est présente au dénominateur. Ce qui change dans ce cas, c'est qu'il faut exclure de l'ensemble des solutions certaines valeurs de l'inconnue qui annulent le dénominateur d'une fraction présente dans l'équation. On appelle ces valeurs des **valeurs interdites**.

Propriété 1 : Si a et b sont des réels tels que $b \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$$

Méthode : Résolution d'une équation quotient

Résolution de l'équation $\frac{3x+1}{1-x} = \frac{1}{x+1}$

1 - On détermine les **valeurs interdites**

$$1 - x = 0 \quad \text{et} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = -1$$

2 - On regroupe tous les termes dans un même membre

$$\frac{3x+1}{1-x} - \frac{1}{x+1} = 0$$

3 - On met toutes les fractions sur le même dénominateur

$$\frac{(3x+1)(x+1)}{(1-x)(x+1)} - \frac{1(1-x)}{(x+1)(1-x)} = 0$$

$$\frac{(3x+1)(x+1) - 1(1-x)}{(x+1)(1-x)} = 0$$

4 - On factorise le numérateur à l'aide d'une égalité remarquable

(ou on développe puis on réduit si aucune factorisation n'est possible)

$$\frac{3x^2 + x + 3x + 1 - 1 + x}{(x+1)(1-x)} = 0$$

$$\frac{3x^2 + 5x}{(x+1)(1-x)} = 0$$

$$\frac{x(3x+5)}{(x+1)(1-x)} = 0$$

5 - On calcule les **racines du numérateur**

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 5 = 0$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

6 - On élimine les **valeurs interdites** éventuelles des racines obtenues à l'étape 5

0 et $-\frac{5}{3}$ ne sont pas des valeurs interdites.

7 - On donne l'ensemble des solutions

$$S = \left\{ 0; -\frac{5}{3} \right\}$$

INÉQUATIONS DU 2nd DEGRÉ À UNE INCONNUE

I - Résolution algébrique d'une inéquation produit

Propriété 1 :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Propriété 2 :

- Le produit de 2 réels de même signe est positif.
- Le produit de 2 réels de signes contraires est négatif.

Méthode : Résolution d'une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.

Résoudre l'inéquation $(x - 2)(-3x - 6) \leq 0$ dans $\mathbb{R}$

1 - Recherche des racines du polynôme

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad -3x - 6 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

2 - Tableau de signes

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$a = 1 > 0 \quad x - 2$	$-$		$- \quad 0 \quad +$	
$a = -3 < 0 \quad -3x - 6$	$+$	0	$-$	$-$
$(x - 2)(-3x - 6)$	$-$	0	$+$	$0 \quad -$

3 - Ensemble des solutions :

$$S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

II - Résolution algébrique d'une inéquation du 2nd degré

Le début de la résolution est identique à celui de la résolution d'une équation du 2nd degré à une inconnue. L'objectif est d'obtenir une inéquation produit de façon à utiliser ensuite la méthode étudiée au paragraphe I.

Méthode : Résolution d'une inéquation du 2nd degré

Résoudre l'inéquation $(x - 1)^2 > 2(x - 1)$ dans $\mathbb{R}$

1 - On regroupe tous les termes dans un même membre

$$(x - 1)^2 - 2(x - 1) > 0$$

2 - On factorise à l'aide d'une égalité remarquable

$$(x - 1) \times (x - 1) - 2 \times (x - 1) > 0$$

$$(x - 1) \times [(x - 1) - 2] > 0$$

$$(x - 1) \times (x - 1 - 2) > 0$$

$$(x - 1)(x - 3) > 0$$

3 - On cherche les racines du polynôme

$$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

4 - On fait un tableau de signes

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$a = 1 > 0 \quad x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$a = 1 > 0 \quad x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x - 3)$	$+$	0	$-$	$+$

5 - On donne l'ensemble des solutions :

$$S =]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$$

INÉQUATIONS QUOTIENT À UNE INCONNUE

Propriété 1 :

- Le quotient de 2 réels de même signe est positif.
- Le quotient de 2 réels de signes contraires est négatif.

Méthode : Résolution d'une inéquation quotient

Résolution de l'inéquation $\frac{x+1}{x+2} < \frac{x-1}{x-2}$ dans $\mathbb{R}$

1 - On détermine les valeurs interdites

$$\begin{aligned} x+2 &= 0 & \text{et} & & x-2 &= 0 \\ x &= -2 & \text{et} & & x &= 2 \end{aligned}$$

2 - On regroupe tous les termes dans un même membre

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} < 0$$

3 - On met toutes les fractions sur le même dénominateur

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} &< 0 \\ \frac{(x+1)(x-2) - (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} &< 0 \end{aligned}$$

4 - On factorise le numérateur à l'aide d'une égalité remarquable
(ou on développe si aucune factorisation n'est possible)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 2x - 2 - (x^2 - x + 2x - 2)}{(x+2)(x-2)} &< 0 \\ \frac{\cancel{x^2} + x - 2\cancel{x} - 2 - \cancel{x^2} + x - 2\cancel{x} + 2}{(x+2)(x-2)} &< 0 \\ \frac{-2x}{(x+2)(x-2)} &< 0 \end{aligned}$$

5 - On calcule les racines du numérateur

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

6 - On fait un tableau de signes

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$a = 1 > 0 \quad x+2$	-	0	+	+	+
$a = 1 > 0 \quad x-2$	-	-	-	0	+
$a = -2 < 0 \quad -2x$	+	+	0	-	-
$\frac{-2x}{(x+2)(x-2)}$	+	-	0	+	-

7 - On donne l'ensemble des solutions :

$$S =]-2; 0[\cup]2; +\infty[$$

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Au collège, on appelle fonction f une relation mathématique qui à un nombre x associe le nombre $f(x)$.

On note $f : x \mapsto f(x)$ qui se lit « la fonction f qui à x associe $f(x)$ ».

Le nombre x s'appelle la **variable**. En effet, c'est en faisant varier ce nombre que l'on va calculer les différentes valeurs $f(x)$.

I - Domaine de définition

Définition 1 : On appelle **fonction réelle** f , une relation entre 2 ensembles de réels D et F telle que, à chaque élément de D , on associe un unique élément de F . On note :

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Vocabulaire :

- x est appelé **antécédent** de $f(x)$.
- $f(x)$ est appelé **image** de x .
- D est appelé **domaine de définition** de f .

Quelques fonctions de référence et leur domaine de définition

- La fonction **affine** $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**).
- La fonction **carré** $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction **inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ (le nombre 0 n'a pas d'inverse).
- La fonction **racine carrée** $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$ (la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

Remarque : Selon les besoins, on pourra restreindre l'étendue du domaine de définition d'une fonction.

II - Courbe représentative

Un intérêt des fonctions, c'est que l'on peut les associer à des courbes.

Définition 2 : On appelle **courbe représentative de la fonction** f l'ensemble

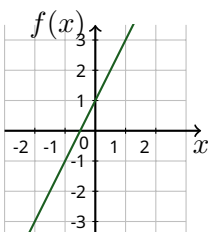
$$C_f = \{M(x, y), x \in D, y \in F \text{ tel que } y = f(x)\}$$

Remarque :

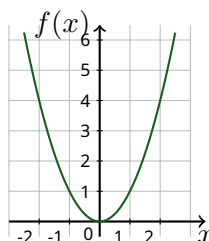
- On dit aussi que la courbe C_f a pour **équation** $y = f(x)$.
- Pour tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction sur un intervalle donné, on calcule les coordonnées d'un nombre suffisant de points de la courbe puis on les relie (sans règle).

Quelques courbes de référence

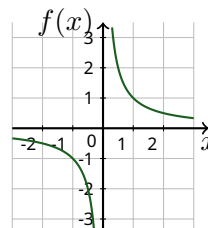
Fonction affine
 $y = 2x + 1$



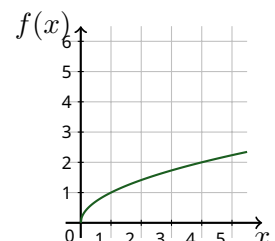
Fonction carré
 $y = x^2$



Fonction inverse
 $y = \frac{1}{x}$



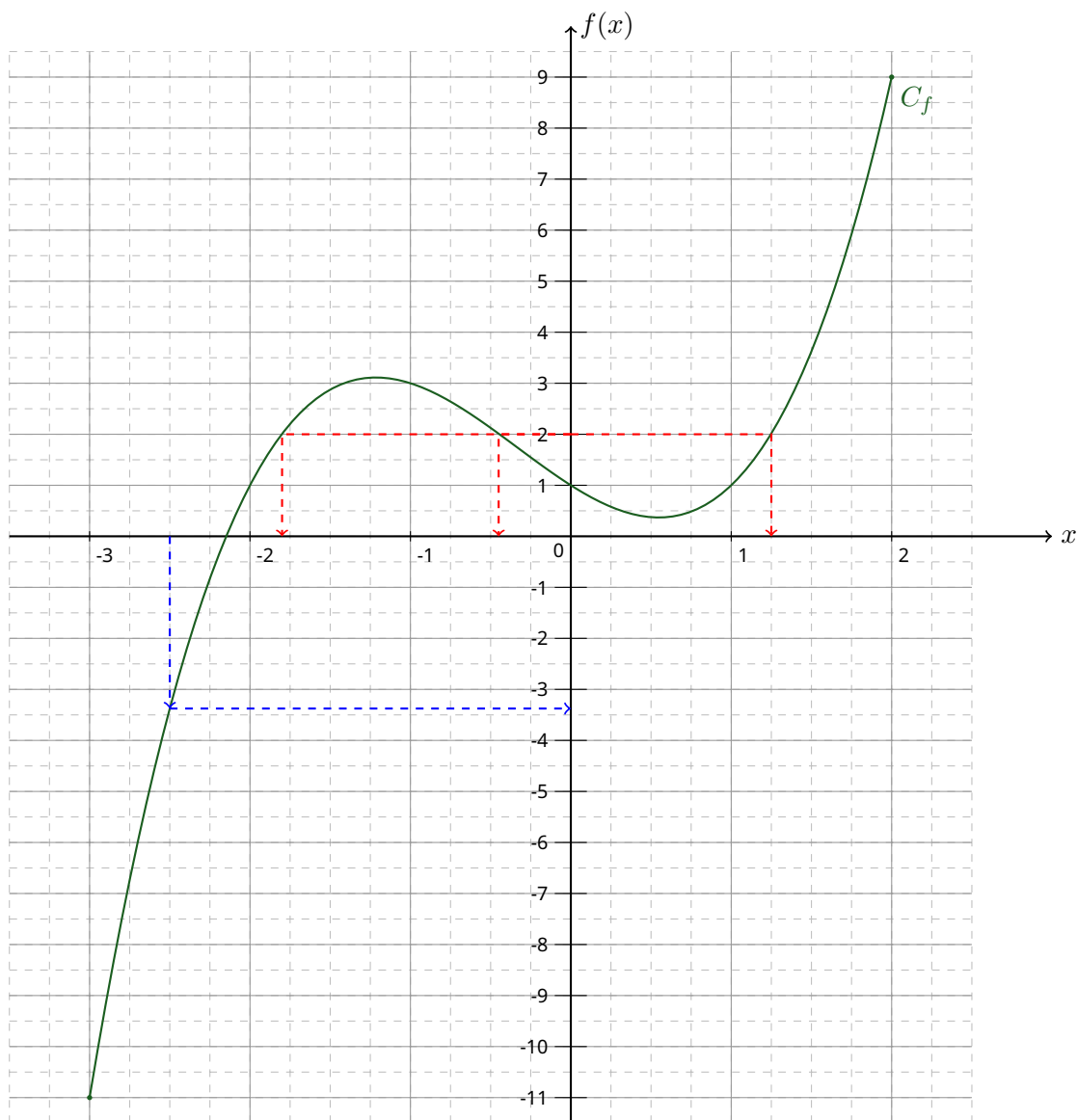
Fonction racine carrée
 $y = \sqrt{x}$



III - Lectures graphiques

Lecture graphique d'image et d'antécédents

Ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2 - 2x + 1$ définie sur $D = [-3; 2]$.



- Lire graphiquement une image

L'ordonnée du point de la courbe C_f d'abscisse $-2,5$ est environ $-3,5$.

Ce qui signifie que l'image de $-2,5$ par f est environ $-3,5$ donc $f(-2,5) \approx -3,5$.

- Lire graphiquement des antécédents

Trois points de la courbe C_f ont pour ordonnée 2.

Leurs abscisses respectives sont environ $-1,8$; $-0,45$; $1,25$.

Les antécédents de 2 par f sont donc environ $-1,8$; $-0,45$; $1,25$
donc $f(-1,8) \approx 2$; $f(-0,45) \approx 2$; $f(1,25) \approx 2$.

Aucun point de la courbe C_f n'a une ordonnée égale à $-11,2$ donc $-11,2$ n'a pas d'antécédent par f .

Remarque :

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à lire graphiquement les antécédents de k par la fonction f .
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > k$ revient à lire graphiquement les abscisses des points de la courbe représentative de f ayant une ordonnée strictement supérieure à k .

IV - Étude d'une fonction

1 - Sens de variation

Sur un graphique, lorsque la courbe monte, on dit que la fonction est croissante et lorsque la courbe descend, on dit que la fonction est décroissante.

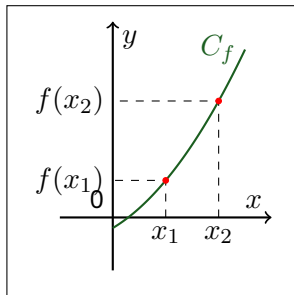
Lecture graphique du sens de variation

Dans l'exemple précédent, par lecture graphique :

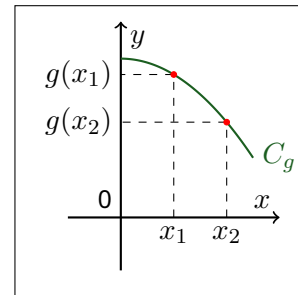
f est croissante sur $[-3; -1, 25] \cup [0, 5; 2]$ et décroissante sur $[-1, 25; 0, 5]$.

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, il faut une interprétation mathématique de ces observations.

Sens de variation d'une fonction



C_f monte signifie que la fonction f est **croissante**.
Soit $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ deux points de C_f , on observe que si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.



C_g descend signifie que la fonction g est **décroissante**.
Soit $(x_1, g(x_1))$ et $(x_2, g(x_2))$ deux points de C_g , on observe que si $x_1 \leq x_2$ alors $g(x_1) \geq g(x_2)$.

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I .

- On dit que la **fonction** f est **croissante sur I** , lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
- On dit que la **fonction** f est **décroissante sur I** , lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

Remarque :

Le sens de variation d'une fonction s'étudie localement c'est à dire que x_1 et x_2 sont très proches. Il faut donc que la fonction f soit définie sur $[x_1; x_2]$. C'est pour cela que dans la définition, on impose à la fonction f d'être définie sur un intervalle I contenant x_1 et x_2 .

2 - Maximum et minimum d'une fonction

Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I et a un réel appartenant à I .

- On dit que $f(a)$ est le **maximum** de la fonction f **sur I** , lorsque :
pour tout réel x de I , $f(x) \leq f(a)$
- On dit que $f(a)$ est le **minimum** de la fonction f **sur I** , lorsque :
pour tout réel x de I , $f(x) \geq f(a)$

Lecture graphique des extremums

Dans l'exemple précédent, par lecture graphique :

- Le minimum de f sur D est $f(-3) = -11$ et le maximum de f sur D est $f(2) = 9$.
- Le maximum de f sur $[-2; 0]$ est $f(-1, 25) \approx 3$.

3 – Tableau de variation d'une fonction

Le tableau de variation d'une fonction résume l'étude d'une fonction sur son domaine de définition.

Tableau de variation

Pour l'exemple précédent, on obtient le tableau suivant :

x	-3	-1,25	0,5	2
$f(x)$	-11	3	0,4	9

Diagram illustrating the variation of the function $f(x)$ between the points $x = -3, -1,25, 0,5, 2$. The function values are $f(-3) = -11$, $f(-1,25) = 3$, $f(0,5) = 0,4$, and $f(2) = 9$. An upward arrow indicates the function is increasing from $x = -3$ to $x = -1,25$, and a downward arrow indicates it is decreasing from $x = -1,25$ to $x = 0,5$. An upward arrow indicates it is increasing from $x = 0,5$ to $x = 2$.

Une flèche montante indique que la fonction est croissante, et une flèche descendante indique que la fonction est décroissante.

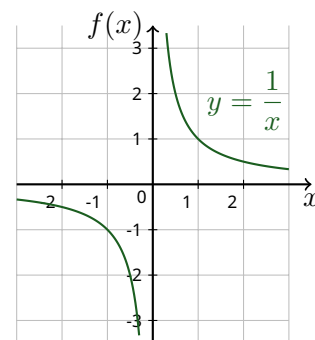
Tableau de variation et valeur interdite

La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

On place une double barre dans le tableau de variation pour indiquer que 0 n'a pas d'image.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$			

Diagram illustrating the variation of the function $f(x) = \frac{1}{x}$. The function is decreasing on $] -\infty; 0[$ and $]0; +\infty[$. A double vertical line is placed at $x = 0$ to indicate that 0 is not in the domain.



LA FONCTION AFFINE

I - Définition et représentation graphique

Définition 1 : On appelle **fonction affine** une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque : Une **fonction linéaire** $x \mapsto ax$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine particulière.

Propriété 1 : La représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

Représentation graphique d'une fonction affine

Représentation graphique de f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 3x - 4$.

La représentation graphique de f est la droite $D_f : y = 3x - 4$.

Pour tracer cette droite, il suffit d'avoir les coordonnées de 2 points distincts de cette droite.

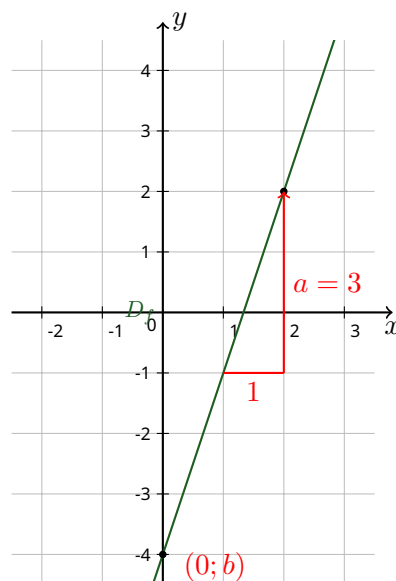
$$f(0) = 3 \times 0 - 4 = -4 \text{ donc } (0; -4) \in D_f$$

$$f(2) = 3 \times 2 - 4 = 2 \text{ donc } (2; 2) \in D_f.$$

Le **coefficient directeur** de D_f est la différence des images de 2 entiers consécutifs : $a = f(2) - f(1) = 2 - (3 \times 1 - 4) = 3$.

(Cela explique la méthode graphique pour déterminer le coefficient directeur.)

L'**ordonnée à l'origine** de D_f est l'ordonnée du point d'intersection de D_f avec l'axe (Oy) : $b = -4$



II - Sens de variation et signe ($a \neq 0$)

Sens de variation de $f : x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$

Soit x_1 et x_2 des réels tels que $x_1 < x_2$;

Si $a < 0$ alors $a \times x_1 > a \times x_2$

d'où $a \times x_1 + b > a \times x_2 + b$

donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc f est décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$ $a < 0$	↘	

Si $a > 0$ alors $a \times x_1 < a \times x_2$

d'où $a \times x_1 + b < a \times x_2 + b$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc f est croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$ $a > 0$	↗	

Signe de $f : x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$

Si $a < 0$ alors $ax + b > 0$

$$\Leftrightarrow ax > -b$$

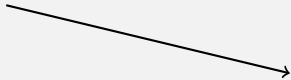
$$\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \quad (\text{car } a < 0)$$

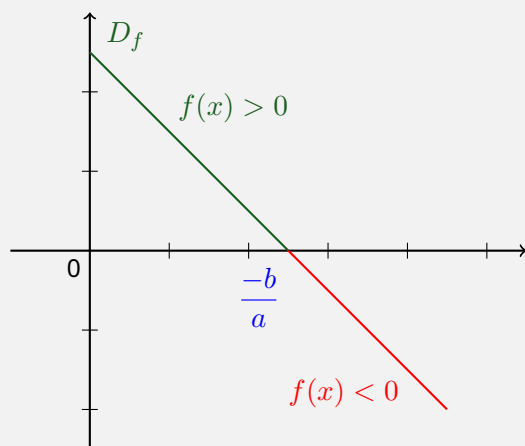
Si $a > 0$ alors $ax + b > 0$

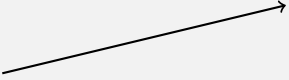
$$\Leftrightarrow ax > -b$$

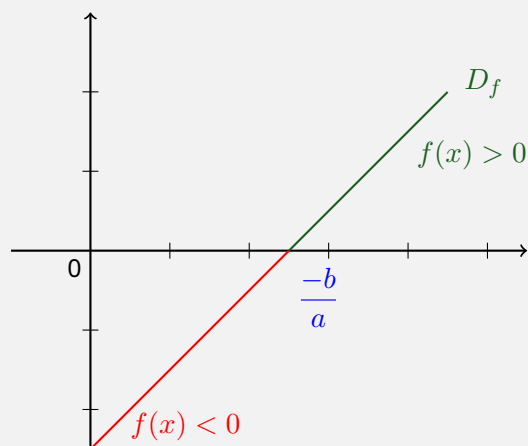
$$\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \quad (\text{car } a > 0)$$

Propriété 2 : Tableau récapitulatif d'une fonction affine

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$ $a < 0$			
Signe de $ax + b$	+	0	-



x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$ $a > 0$			
Signe de $ax + b$	-	0	+



LA FONCTION CARRÉ

Définition 1 : On appelle **fonction carré** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

Étude des variations de la fonction carré

Soit $x_1, x_2 \in]-\infty; 0]$ tels que $x_1 \leq x_2$

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ donc $x_2 + x_1 \leq 0$
et $x_1 \leq x_2$ donc $x_2 - x_1 \geq 0$

$$\text{donc } (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \leq 0$$

$$\text{donc } x_2^2 \leq x_1^2$$

donc $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$

Soit $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ tels que $x_1 \leq x_2$

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

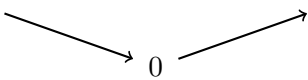
$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ donc $x_2 + x_1 \geq 0$
et $x_1 \leq x_2$ donc $x_2 - x_1 \geq 0$

$$\text{donc } (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \geq 0$$

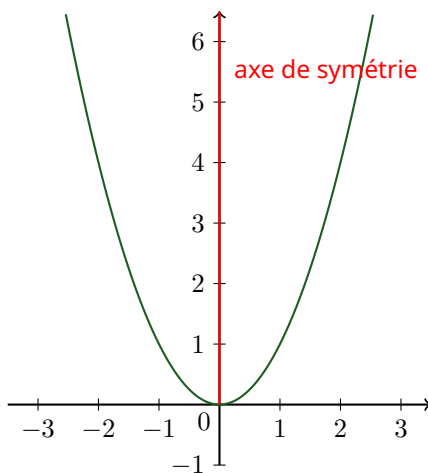
$$\text{donc } x_2^2 \geq x_1^2$$

donc $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$

On en déduit le **tableau de variation de la fonction carré** :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Représentation graphique de la fonction carré



La courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $y = x^2$.

Elle est au-dessus de l'axe des abscisses.

En effet, **pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$** .

$(0; 0)$ est l'unique point de contact de la parabole avec l'axe des abscisses.

En effet, **$0^2 = 0$** .

Application : Comparer des expressions

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto -4x^2 + 1$ sur $[0; +\infty[$.

$$0 \leq x_1 < x_2$$

$$0 \leq x_1^2 < x_2^2 \quad (\text{fonction carrée croissante sur } [0; +\infty[)$$

$$(-4) \times x_1^2 > (-4) \times x_2^2 \quad (\text{multiplication par un nombre négatif})$$

$$-4x_1^2 + 1 > -4x_2^2 + 1$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

LA FONCTION CUBE

Définition 1 : On appelle **fonction cube** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

Étude des variations de la fonction cube

Remarque : $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Soit $x_1, x_2 \in]-\infty; 0]$ tels que $x_1 \leq x_2$

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$$

$x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ donc $x_2x_1 \geq 0$

et $x_1 \leq x_2$ donc $x_2 - x_1 \geq 0$

donc $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \geq 0$

donc $x_2^3 \geq x_1^3$

donc $x \mapsto x^3$ est croissante sur $] -\infty; 0]$

Soit $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ tels que $x_1 \leq x_2$

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$$

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ donc $x_2x_1 \geq 0$

et $x_1 \leq x_2$ donc $x_2 - x_1 \geq 0$

donc $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \geq 0$

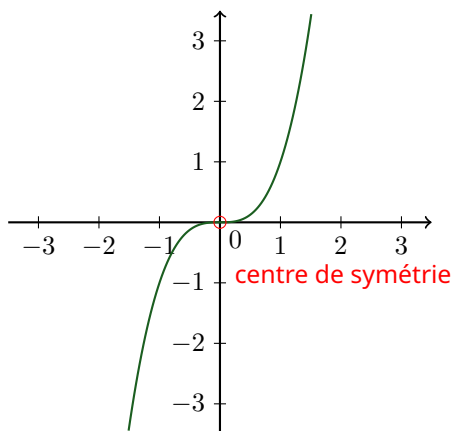
donc $x_2^3 \geq x_1^3$

donc $x \mapsto x^3$ est croissante sur $[0; +\infty[$

On en déduit le **tableau de variation de la fonction cube** :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3			

Représentation graphique de la fonction cube



La courbe représentative de la fonction cube est la courbe d'équation $y = x^3$. Elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe est en dessous de l'axe des abscisses sur $] -\infty; 0[$.

En effet, **pour tout $x \in] -\infty; 0[, x^3 < 0$.**

La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses sur $]0; +\infty[$.

En effet, **pour tout $x \in]0; +\infty[, x^3 > 0$.**

$(0; 0)$ est l'unique point de contact de la courbe avec l'axe des abscisses.

En effet, **$0^3 = 0$.**

Application : Comparer des expressions

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

$$x_1 < x_2$$

$$x_1^3 < x_2^3$$

(fonction cube croissante sur $\mathbb{R}$)

$$-x_1^3 > -x_2^3$$

(multiplication par un nombre négatif)

$$-x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

LA FONCTION INVERSE

Définition 1 : On appelle **fonction inverse** la fonction définie sur $] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Étude des variations de la fonction inverse

$$\text{Soit } x_1, x_2 \in] - \infty; 0[\text{ tels que } x_1 \leq x_2$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1 \times x_1}{x_2 \times x_1} - \frac{1 \times x_2}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$$

$$x_1 \leq x_2 \text{ donc } x_1 - x_2 \leq 0$$

$$\text{et } x_1 < 0 \text{ et } x_2 < 0 \text{ donc } x_1 x_2 > 0$$

$$\text{donc } \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \leq 0 \text{ donc } \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}$$

donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] - \infty; 0[$

$$\text{Soit } x_1, x_2 \in] 0; +\infty[\text{ tels que } x_1 \leq x_2$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1 \times x_1}{x_2 \times x_1} - \frac{1 \times x_2}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$$

$$x_1 \leq x_2 \text{ donc } x_1 - x_2 \leq 0$$

$$\text{et } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \text{ donc } x_1 x_2 > 0$$

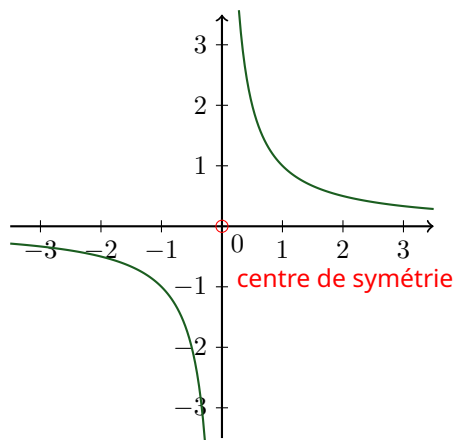
$$\text{donc } \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \leq 0 \text{ donc } \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}$$

donc $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] 0; +\infty[$

On en déduit le **tableau de variation de la fonction inverse** :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘		↘

Représentation graphique de la fonction inverse



La courbe représentative de la fonction inverse est

l'**hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Elle est composée de 2 branches puisque 0 n'a pas d'image.

La courbe est en dessous de l'axe des abscisses sur $] - \infty; 0[$.

En effet, **pour tout** $x \in] - \infty; 0[$, $\frac{1}{x} < 0$.

La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses sur $] 0; +\infty[$.

En effet, **pour tout** $x \in] 0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.

Application : Comparer des expressions

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur $] 0; +\infty[$.

$$0 < x_1 < x_2$$

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0$$

$$2 \times \frac{1}{x_1} > 2 \times \frac{1}{x_2} > 0$$

$$\frac{2}{x_1} - 1 > \frac{2}{x_2} - 1$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

(fonction inverse décroissante sur $] 0; +\infty[$)

Donc la fonction f est décroissante sur $] 0; +\infty[$.

LA FONCTION RACINE CARRÉE

Définition 1 : On appelle **fonction racine carrée** la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.

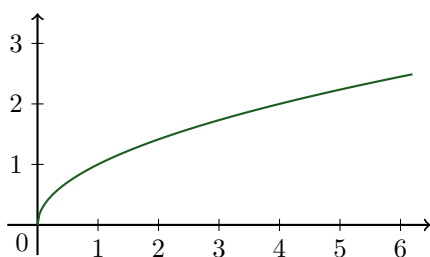
Étude des variations de la fonction racine carrée

$$\begin{aligned} \text{Soit } x_1, x_2 \in [0; +\infty[\text{ tels que } x_1 \leq x_2 \\ \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} &= \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{(\sqrt{x_2})^2 - (\sqrt{x_1})^2}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \\ \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} &> 0 \text{ et } x_1 \leq x_2 \text{ donc } x_2 - x_1 \geq 0 \\ \text{donc } \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} &\geq 0 \\ \text{donc } x \mapsto \sqrt{x} &\text{ est croissante sur } [0; +\infty[\end{aligned}$$

On en déduit le **tableau de variation de la fonction racine carrée** :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	

Représentation graphique de la fonction racine carrée



La courbe représentative de la fonction racine carrée est la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.

Elle est au-dessus de l'axe des abscisses.

En effet, **pour tout** $x \in [0; +\infty[, \sqrt{x} \geq 0$.

$(0; 0)$ est l'unique point de contact de la courbe avec l'axe des abscisses.

En effet, $\sqrt{0} = 0$.

Application : Comparer des expressions

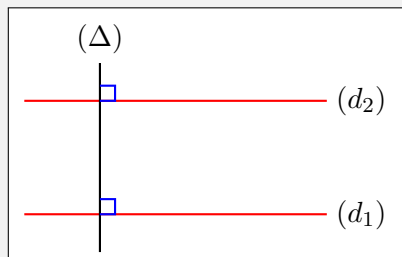
Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto -2\sqrt{x} + 3$ sur $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 < x_2 \\ \sqrt{x_1} &< \sqrt{x_2} && \text{(fonction racine carrée croissante sur } [0; +\infty[) \\ -2\sqrt{x_1} &> -2\sqrt{x_2} && \text{(multiplication par un nombre négatif)} \\ -2\sqrt{x_1} + 3 &> -2\sqrt{x_2} + 3 \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

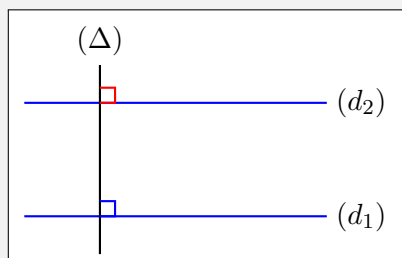
Donc la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

I - Les droites

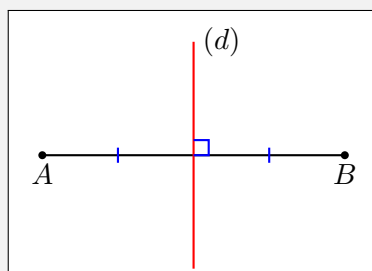
Propriété 1 : Si 2 droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles.



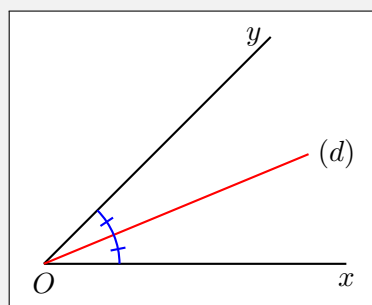
Propriété 2 : Si 2 droites sont parallèles et qu'une troisième droite est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.



Définition 1 : On appelle **médiatrice** d'un segment la droite perpendiculaire au segment qui passe par le milieu du segment.

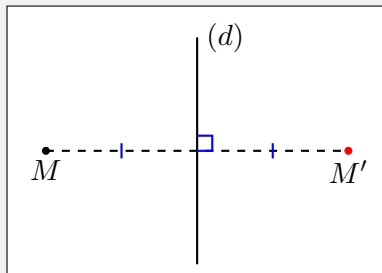


Définition 2 : On appelle **bissectrice** d'un angle une droite qui partage un angle en 2 angles égaux.

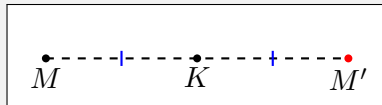


II - Les symétries

Définition 3 : On appelle symétrique du point M par rapport à une droite (d) le point M' tel que (d) est la médiatrice du segment $[MM']$.

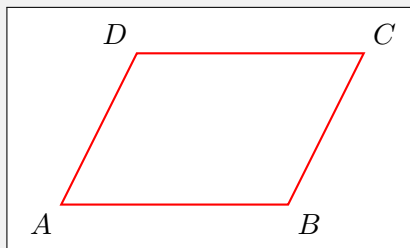


Définition 4 : On appelle symétrique du point M par rapport à un point K le point M' tel que K est le milieu du segment $[MM']$.

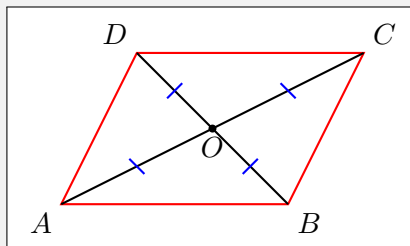


III - Le parallélogramme

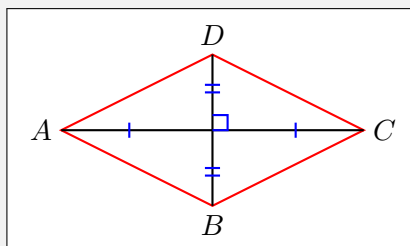
Définition 5 : On appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



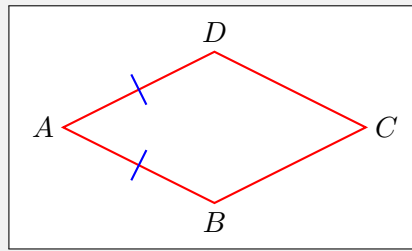
Propriété 3 : Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.



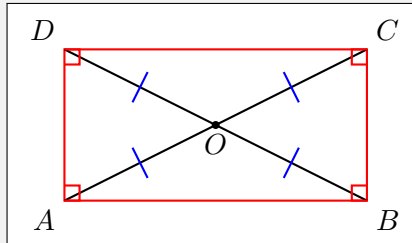
Propriété 4 : Si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.



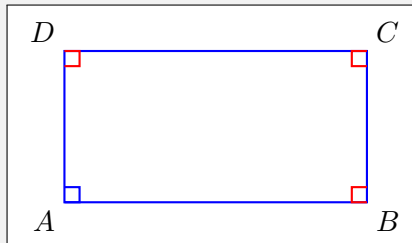
Propriété 5 : Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.



Propriété 6 : Si un parallélogramme a des diagonales de la même longueur alors c'est un rectangle.

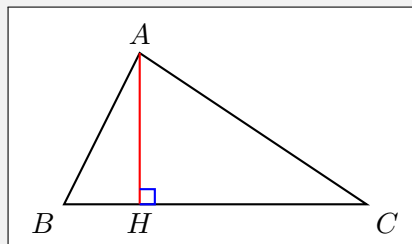


Propriété 7 : Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.

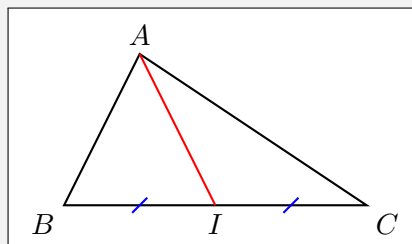


IV - Le triangle

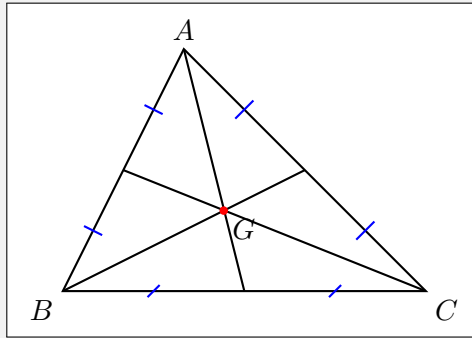
Définition 6 : On appelle **hauteur** d'un triangle une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



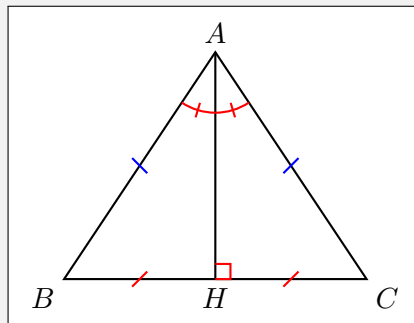
Définition 7 : Dans un triangle, on appelle **médiane** une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.



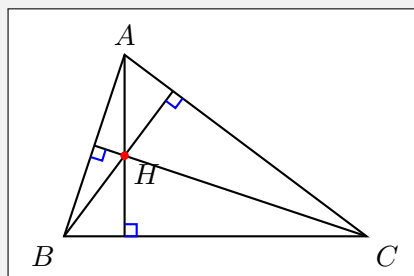
Propriété 8 : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est appelé **centre de gravité** du triangle.



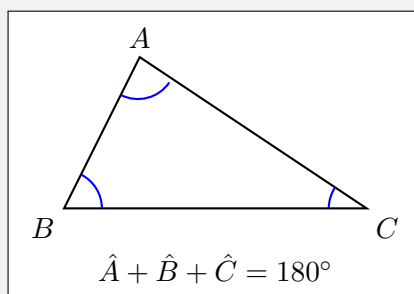
Propriété 9 : Si un triangle est isocèle alors la médiane, la hauteur et la bissectrice, passant par le sommet principal sont confondues avec la médiatrice de la base.



Propriété 10 : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est appelé **orthocentre** du triangle.



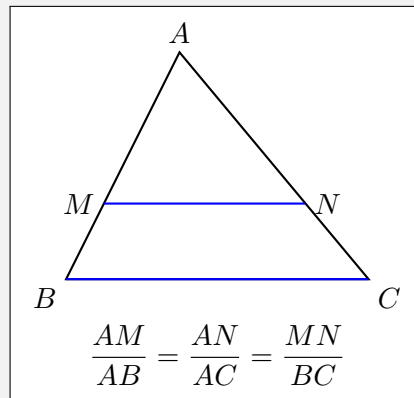
Propriété 11 : La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .



Propriété 12 : Théorème de Thalès

Soit A, B, C, M et N des points distincts du plan.

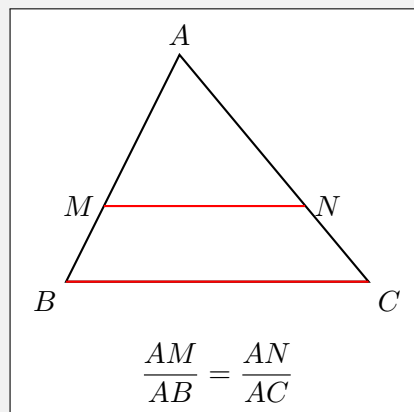
Si $\begin{cases} (MB) \text{ et } (NC) \text{ sont sécantes en } A \\ \text{et } (MN) \parallel (BC) \end{cases}$ alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Propriété 13 : Réciproque de Thalès

Soit A, B, C, M et N des points distincts du plan.

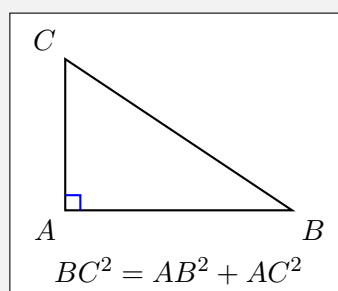
Si $\begin{cases} A, B, M \text{ et } A, C, N \text{ sont alignés dans le même ordre} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \end{cases}$ alors $(MN) \parallel (BC)$



V - Le triangle rectangle

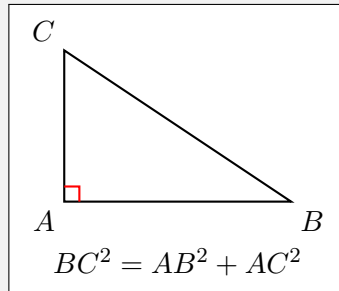
Propriété 14 : Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés du triangle.



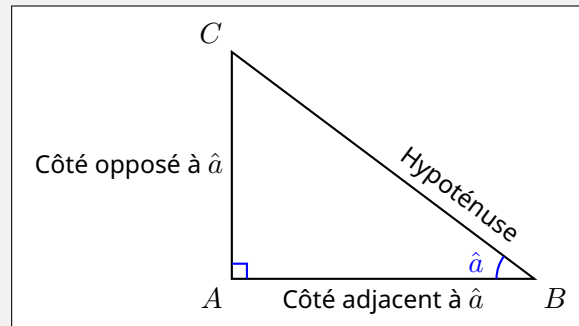
Propriété 15 : Réciproque de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.



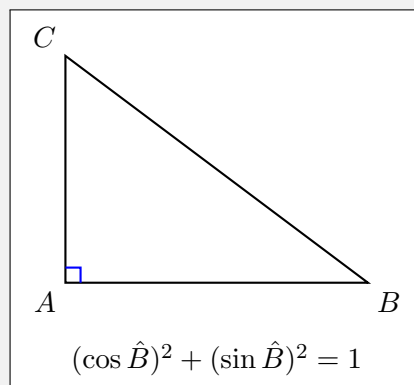
Définition 8 : Soit $\hat{a}$ un angle au sommet aigu d'un triangle rectangle :

- On appelle **cosinus** de l'angle $\hat{a}$, noté $\cos \hat{a}$, le rapport $\cos \hat{a} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{a}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- On appelle **sinus** de l'angle $\hat{a}$, noté $\sin \hat{a}$, le rapport $\sin \hat{a} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{a}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- On appelle **tangente** de l'angle $\hat{a}$, noté $\tan \hat{a}$, le rapport $\tan \hat{a} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{a}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{a}}$



Propriété 16 : Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$(\cos \hat{B})^2 + (\sin \hat{B})^2 = 1$$



Démonstration :

$$(\cos \hat{B})^2 + (\sin \hat{B})^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

or, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{donc } (\cos \hat{B})^2 + (\sin \hat{B})^2 = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

VI - Distances et cercle

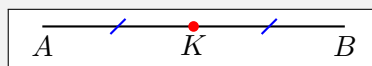
1 - Distances

Propriété 17 : Soit A, B et M trois points du plan.

- Si $M \notin [AB]$ alors $AM + MB > AB$
- Si $M \in [AB]$ alors $AM + MB = AB$

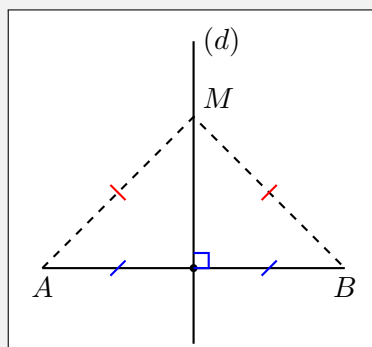
Définition 9 : On appelle **milieu** d'un segment le point du segment qui est équidistant des extrémités du segment.

$$K \text{ milieu de } [AB] \iff \begin{cases} K \in [AB] \\ AK = KB \end{cases}$$



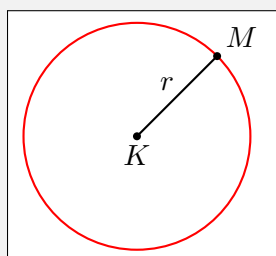
Propriété 18 :

- Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
- Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment.



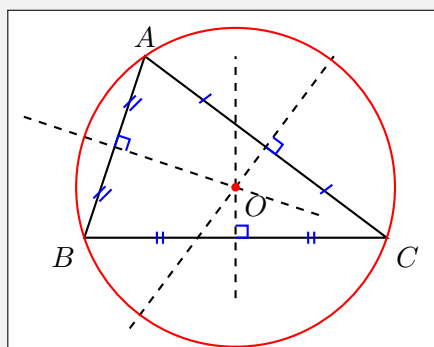
2 - Le cercle

Définition 10 : On appelle **cercle de centre K et de rayon $r > 0$** l'ensemble des points M tels que : $KM = r$.



Propriété 19 : Les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes (elles se coupent en un même point).

Leur point de concours est le centre du cercle passant par les 3 sommets du triangle, appelé **cercle circonscrit** au triangle.



Démonstration :

Soit ABC un triangle quelconque.

On appelle I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

On appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC d'où $OA = OB = OC$.

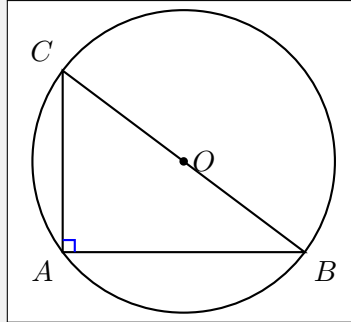
$OA = OB$ donc O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

$OB = OC$ donc O appartient à la médiatrice de $[BC]$.

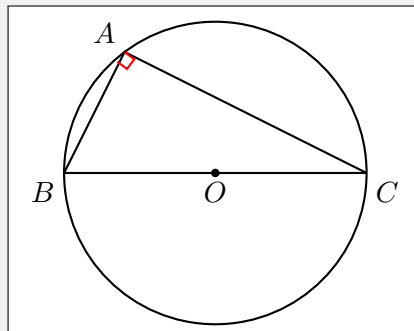
$OA = OC$ donc O appartient à la médiatrice de $[AC]$.

Donc les 3 médiatrices du triangle ABC sont concourantes en O centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Propriété 20 : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse du triangle.



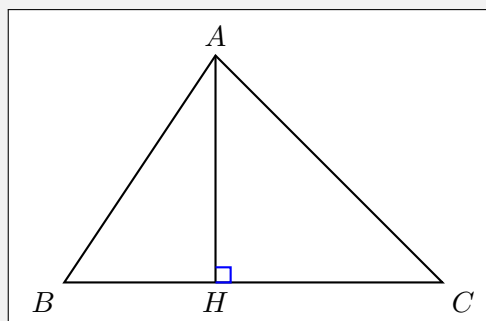
Propriété 21 : Si un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.



3 - Aire du triangle

Propriété 22 : Si la hauteur (AH) d'un triangle ABC coupe la droite (BC) en H alors :

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{AH \times BC}{2}$$



I – Repère orthonormé du plan

Définition 1 : On appelle repère orthonormé du plan un triplet de points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet principal O .

Vocabulaire : Le point O est appelé l'origine du repère.

La droite (OI) est appelée l'axe des abscisses et la distance OI définit l'unité sur cet axe.

La droite (OJ) est appelée l'axe des ordonnées et la distance OJ définit l'unité sur cet axe.

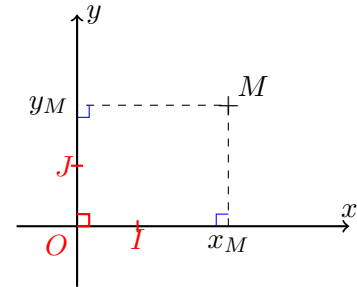
Remarque : Ce repère est "ortho" (droit) parce que les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Ce repère est "normé" parce que $OI = OJ$.

Dans le repère (O, I, J) :

- x_M s'appelle l'abscisse du point M .
- y_M s'appelle l'ordonnée du point M .
- $(x_M; y_M)$ s'appelle le couple de coordonnées du point M .

On note : $M(x_M; y_M)$



II – Distance entre 2 points dans un repère orthonormé

Propriété 1 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

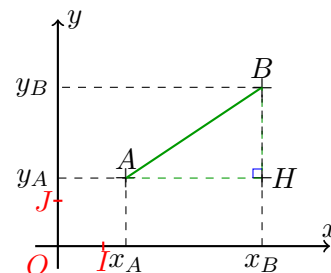
Explication de la propriété 1

Le repère (O, I, J) est orthonormé donc ABH est rectangle en H .

On applique la propriété de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

Donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



Méthode : Calculer la distance entre 2 points

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on donne : $C(-1; 2)$ et $D(3; -4)$.

Calculer la distance CD .

On applique la propriété 1 :

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-4 - 2)^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Si les points C et D ont été placés dans un repère orthonormé (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm, alors on peut vérifier la longueur CD sur le graphique en mesurant ($CD \approx 7,2$ cm).

III – Coordonnées du milieu d'un segment dans un repère

Propriété 2 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère (O, I, J) .

Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Explication de la propriété 2

(KB) et (LH) sont sécantes en A , et $(KL) \parallel (BH)$.

On suppose que $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.

On applique la propriété de Thalès :

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AH} = \frac{KL}{BH}$$

Or K est le milieu de $[AB]$ donc $\frac{AK}{AB} = \frac{1}{2}$

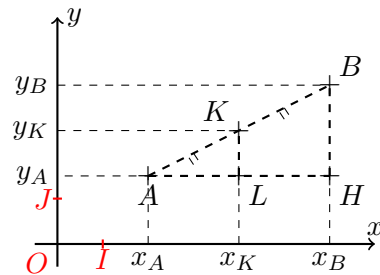
$$\text{Donc } \frac{1}{2} = \frac{x_K - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_K - y_A}{y_B - y_A}$$

$$\frac{x_K - x_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_K - y_A}{y_B - y_A} = \frac{1}{2}$$

Avec un produit en croix, on obtient : $x_K - x_A = \frac{x_B - x_A}{2}$

$$\text{d'où } x_K = \frac{x_B - x_A}{2} + x_A = \frac{x_B - x_A}{2} + \frac{2x_A}{2} = \frac{x_B + x_A}{2}$$

De même, on obtient : $y_K = \frac{y_B + y_A}{2}$



Remarque : Contrairement à la propriété 1 qui nécessite un repère orthonormé, la propriété 2 est vraie dans un repère quelconque.

Méthode : Calculer les coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère (O, I, J) , on donne : $C(-1; 2)$ et $D(3; -4)$.

Calculer les coordonnées du milieu E du segment $[CD]$.

On applique la propriété 2 :

$$E \left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2} \right)$$

$$E \left(\frac{-1 + 3}{2}; \frac{2 + (-4)}{2} \right)$$

$$E(1; -1)$$

I – Représentation d'un vecteur

Propriété 1 :

$ABCD$ est un parallélogramme équivaut à $\begin{cases} ABCD \text{ est non croisé} \\ AB = CD \\ (AB) \parallel (CD) \end{cases}$

On regroupe les informations citées dans la propriété 1 dans un nouvel objet mathématique : le vecteur.

Définition 1 : Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

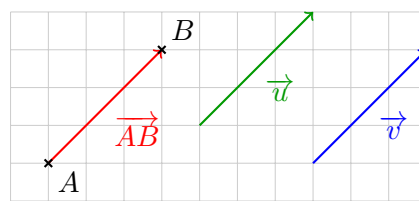
- sa direction, la droite (AB) .
- son sens, de A vers B .
- sa longueur, la distance AB .

Représentations du vecteur $\overrightarrow{AB}$

A et B sont 2 points donnés du plan.

On représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche allant de A à B .

Toute flèche parallèle à la droite (AB) , de longueur AB , dans le sens de A vers B représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



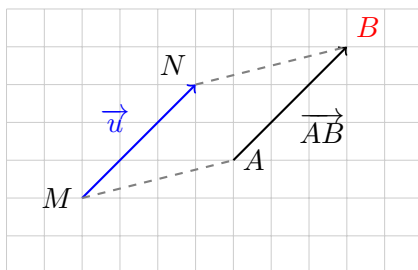
$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \vec{v}$$

Propriété 2 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

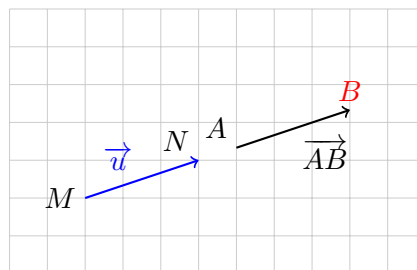
Méthode : Construire un vecteur égal à un vecteur donné

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur donnés. On appelle M l'**origine** du vecteur $\vec{u}$ représenté et N son **extrémité**. Pour construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on trace le parallélogramme $MNBA$.

A, M et N ne sont pas alignés



A, M et N sont alignés



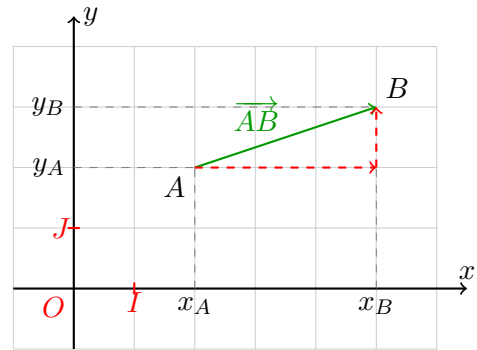
II – Coordonnées d'un vecteur

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ représentent le chemin qui relie l'origine A du vecteur à son extrémité B en suivant la direction (Ox) puis la direction (Oy) .

Dans le repère (O, I, J) ci-contre, on parcourt :

- $x_B - x_A$ en suivant la direction (Ox) ,
- $y_B - y_A$ en suivant la direction (Oy) .



Propriété 3 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points donnés dans un repère (O, I, J) du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Le **vecteur nul** $\overrightarrow{AA}$ (qu'on note aussi $\vec{0}$) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 4 : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

I – Multiplication d'un vecteur par un réel

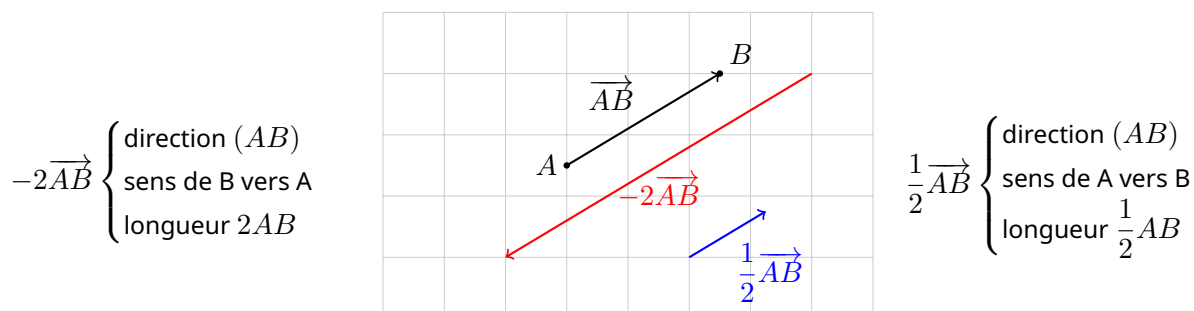
Définition 2 : Soit $\vec{AB}$ un vecteur et k un réel (différent de zéro).

Le **vecteur** $k\vec{AB}$ a :

- la direction (AB)
- le sens de A vers B si $k > 0$ et le sens de B vers A si $k < 0$
- la longueur kAB si $k > 0$ et $-kAB$ si $k < 0$

Méthode : Construction du vecteur $k\vec{AB}$

Le vecteur $\vec{AB}$ étant donné, on trace les vecteurs $-2\vec{AB}$ et $\frac{1}{2}\vec{AB}$.



II – Vecteurs colinéaires

Définition 6 : On dit que deux **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque : Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

Propriété 6 : Soient A, B, C et D des points distincts du plan.

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Cas particulier : $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires si et seulement si les **points** A, B et C sont **alignés**.

Propriété 7 : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés dans un repère (O, I, J) du plan.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' = x'y$.

Démonstration :

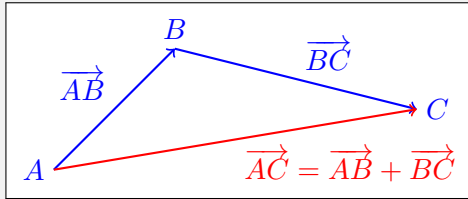
Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés dans un repère (O, I, J) du plan ($x \neq 0, y \neq 0$).

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{x'}{x} \\ k = \frac{y'}{y} \end{cases} \text{ donc } \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ donc } x'y = xy'.$

• Si $x'y = xy'$ alors $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ donc il existe un réel k tel que : $\begin{cases} k = \frac{x'}{x} \\ k = \frac{y'}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \iff \vec{v} = k\vec{u}.$

III – Addition de 2 vecteurs

Définition 7 : Soit A, B, C trois points quelconques, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

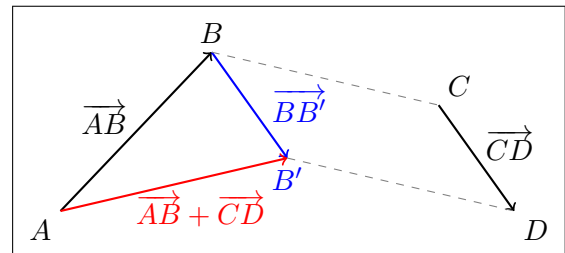


Cette égalité est appelée la **relation de Chasles**.

Méthode : Construction du vecteur somme

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs donnés.
On construit B' tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BB'}$.

On applique la relation de Chasles :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$



Propriété 8 : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés dans un repère (O, I, J) du plan.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Définition 8 : Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **opposé du vecteur** $\overrightarrow{AB}$. On note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

(il a même direction, même longueur mais le sens contraire.)

Remarque : On retrouve une relation déjà connue pour les nombres réels : $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Si on ajoute un vecteur et son opposé, on obtient le vecteur nul.

Définition 9 : **Soustraire** un vecteur revient à additionner son opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Application :

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Simplifier l'expression vectorielle suivante :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

On transforme les soustractions en additions de l'opposé, puis on réorganise les termes pour utiliser la relation de Chasles :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{u} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{CC}$$

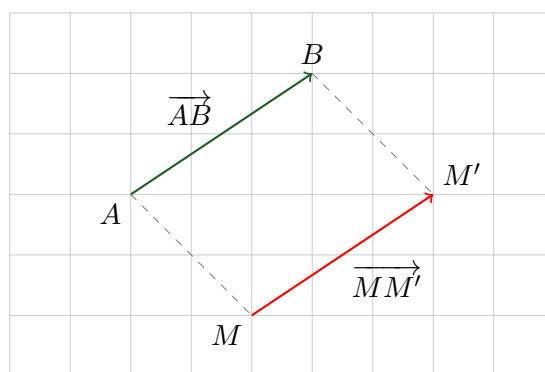
$$\vec{u} = \vec{0}$$

I – La translation

Définition 1 : Soit A et B deux points donnés du plan. La **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Méthode : Construction de l'image d'un point par une translation

Soit A , B et M trois points donnés du plan. On appelle M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. D'après la définition $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ donc il suffit de construire le parallélogramme $ABM'M$.



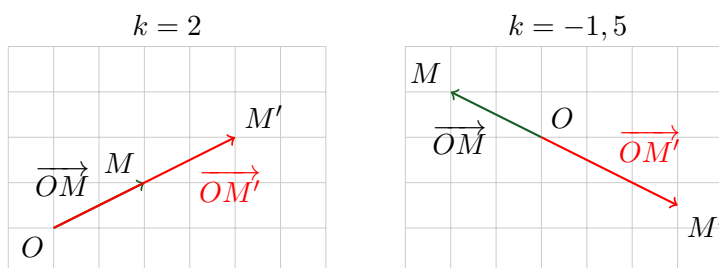
Si le point M est sur la droite (AB) alors le parallélogramme $ABM'M$ est aplati.

II – L'homothétie

Définition 2 : Soit O un point du plan et k un réel donnés. L'**homothétie de centre O et de rapport k** associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Méthode : Construction de l'image d'un point par une homothétie

Soit O un point du plan et k un réel donnés. On appelle M' l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k . D'après la définition $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



III – La symétrie centrale

Définition 3 : Soit O un point donné du plan. La **symétrie de centre O** associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MO}$.

Remarques :

- L'égalité $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MO}$ signifie que le point O est le milieu du segment $[MM']$.
- La symétrie centrale est une homothétie de rapport -1 . En effet, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MO} \iff \overrightarrow{OM'} = -1 \times \overrightarrow{OM}$.

IV – Coordonnées et transformations

Coordonnées de l'image d'un point par une translation

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur et $M(x; y)$ un point donnés dans un repère (O, I, J) .

Soit $M'(x'; y')$ l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Propriété 1 : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un réel donnés dans un repère (O, I, J) du plan.

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Coordonnées de l'image d'un point par une homothétie

Soit $\Omega(a; b)$ un point et $M(x; y)$ des points donnés dans un repère (O, I, J) , et k un réel donné.

Soit $M'(x'; y')$ l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases} \iff \begin{cases} x' = kx + a(1 - k) \\ y' = ky + b(1 - k) \end{cases}$$

I – Vecteur directeur d’une droite

Définition 1 : Soit A et B deux points distincts d’une droite (d) .

On appelle **vecteur directeur** de la droite (d) tout vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

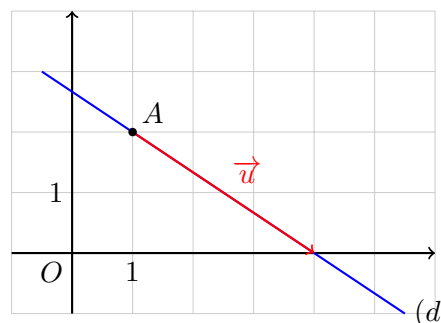
Méthode : Tracer une droite donnée par un point et un vecteur directeur

Dans un repère (O, I, J) , construire la droite (d) passant par le point $A(1; 2)$, de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On place A .

On trace $\vec{u}$ d’origine A .

On trace (d) passant par A et dirigée par $\vec{u}$.



II – Équation cartésienne d’une droite

Propriété 1 : Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite (d) .

Démonstration :

Soit (d) une droite passant par un point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$M(x; y) \in (d) \iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\vec{u}} - y_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\vec{u}} = 0 \iff (x - x_A) \times \beta - (y - y_A) \times \alpha = 0$$

$$\iff \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = 0 \iff \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0$$

$$\iff ax + by + c = 0 \text{ avec } a = \beta, b = -\alpha \text{ et } c = -\beta x_A + \alpha y_A.$$

Méthode : Déterminer l’équation cartésienne d’une droite passant par 2 points

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(-1; 4)$ et $B(3; 2)$.

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ d’où $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Soit $M(x; y)$, on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ d’où $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 4 \end{pmatrix}$.

$M(x; y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\overrightarrow{AB}} = 0 \iff (x + 1) \times (-2) - (y - 4) \times 4 = 0$$

$$\iff -2x - 2 - 4y + 16 = 0 \iff -2x - 4y + 14 = 0 \iff -x - 2y + 7 = 0.$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est $-x - 2y + 7 = 0$.

Cas particulier :

- L’équation de l’axe des abscisses (Ox) est $y = 0$.
- L’équation de l’axe des ordonnées (Oy) est $x = 0$.

Propriété 2 : Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $(d) : ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Démonstration :

Pour raccourcir la démonstration, on se limite au cas où $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Les points $A \left(0; \frac{-c}{b} \right)$ et $B \left(\frac{-c}{a}; 0 \right)$ appartiennent à la droite $(d) : ax + by + c = 0$.

D'où $\overrightarrow{AB} \left(\frac{-c}{a}; \frac{-c}{b} \right)$ est un vecteur directeur de (d) . (attention au signe de l'ordonnée de B)

$x_{\overrightarrow{u}} \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{u}} \times x_{\overrightarrow{AB}} = -b \times \left(\frac{-c}{b} \right) - a \times \left(\frac{-c}{a} \right) = c - c = 0$ donc $\overrightarrow{u} \left(\frac{-b}{a} \right)$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d) .

III – Équation réduite d'une droite

Propriété 3 :

- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Dans un repère (O, I, J) , toute droite (d) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. $\overrightarrow{u} \left(\frac{-b}{a} \right)$ est un vecteur directeur de (d) .

Le vecteur $\overrightarrow{j} \left(0; 1 \right)$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

$(d) \parallel (Oy) \iff \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires $\iff x_{\overrightarrow{j}} \times y_{\overrightarrow{u}} - y_{\overrightarrow{j}} \times x_{\overrightarrow{u}} = 0 \iff 0 \times a - 1 \times (-b) = 0 \iff b = 0$.

- Si $b \neq 0$ alors $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et $ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ donc $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.
- Si $b = 0$ alors $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc (d) est parallèle à l'axe des ordonnées et $ax + 0y + c = 0 \iff ax = -c \iff x = -\frac{c}{a}$ donc $x = k$ avec $k = -\frac{c}{a}$.

Vocabulaire :

- Le réel m s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.
- Le réel p s'appelle l'**ordonnée à l'origine**; c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Propriété 4 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$.

- Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{u} \left(\frac{1}{m} \right)$.

Démonstration :

- Si $x_A \neq x_B$ alors la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

$$A \in (AB) \iff y_A = mx_A + p \text{ et } B \in (AB) \iff y_B = mx_B + p$$

$$\text{d'où } p = y_A - mx_A = y_B - mx_B \iff mx_B - mx_A = y_B - y_A \iff m(x_B - x_A) = y_B - y_A$$

$$\text{or } x_A \neq x_B \text{ donc } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$ donc $\overrightarrow{u} \left(\frac{1}{m} \right)$ est un vecteur directeur de (AB) .

Interprétation graphique du coefficient directeur

(O, I, J) est un repère orthonormé.

Le triangle ABC est rectangle en C .

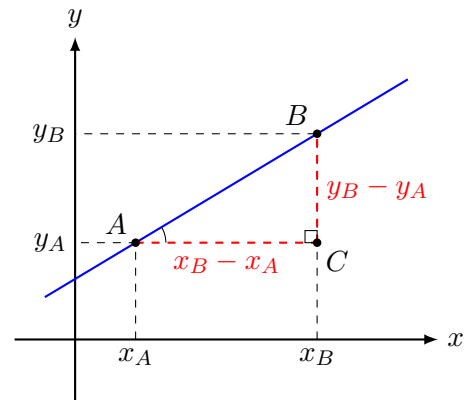
$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

donc le coefficient directeur m de la droite détermine la pente de la droite.

Si $m > 0$ alors la droite "monte".

Si $m < 0$ alors la droite "descend".

Si $m = 0$ alors la droite est parallèle à (Ox) .



Propriété 5 : Les droites $(d) : y = mx + p$ et $(d') : y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

Démonstration :

Si $(d) : y = mx + p$ et $(d') : y = m'x + p'$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{u'} \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d') .

$$(d) \parallel (d') \iff \vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ sont colinéaires} \iff x_{\vec{u}} \times y_{\vec{u'}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{u'}} = 0 \iff 1 \times m' - m \times 1 = 0 \iff m = m'.$$

POURCENTAGES

I - Appliquer un pourcentage

Propriété 1 : Appliquer $t\%$ à un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$.

Méthode : Appliquer un pourcentage

Calculer le montant d'une réduction de 30% sur un prix de 15 € .

Prix initial : $P_0 = 15\text{ €}$

Pourcentage de réduction : $t = 30\%$

Montant de la remise : R

$$R = P_0 \times \frac{t}{100} = 15 \times \frac{30}{100} = 4,5\text{ €}$$

II - Calculer un pourcentage

Propriété 2 : En pourcentage, une partie q d'une quantité Q est égale à $\frac{q}{Q} \times 100$.

Méthode : Calculer un pourcentage

Calculer le pourcentage que représente une réduction de 5 € sur un montant total de 40 € .

Partie en €	$q = 5$	x
Tout en €	$Q = 40$	100

$$x = \frac{q}{Q} \times 100 = \frac{5}{40} \times 100 = 12,5\%$$

III - Évolution en pourcentage

Propriété 3 :

- Augmenter une quantité de $t\%$ équivaut à la multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Réduire une quantité de $t\%$ équivaut à la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Démonstration : Augmentation en pourcentage

On appelle Q_0 la quantité initiale et Q_1 la quantité finale augmentée de $t\%$.

D'après la propriété 1, l'augmentation est égale à $\frac{t}{100} \times Q_0$ donc $Q_1 = Q_0 + \frac{t}{100} \times Q_0$.

On met en facteur Q_0 dans l'expression précédente, on obtient :

$$Q_1 = 1 \times Q_0 + \frac{t}{100} \times Q_0 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times Q_0$$

Méthode : Réduction en pourcentage

Calculer le prix d'un article coûtant 50 € soldé de 20% .

Prix initial : $P_0 = 50\text{ €}$

Pourcentage de réduction : $t = 20\%$

Prix final : P_1

$$P_1 = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times P_0 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 50 = 40\text{ €}$$

Vocabulaire : Le nombre t est appelé **pourcentage d'évolution** de Q_0 à Q_1 .

TAUX D'ÉVOLUTION

I - Taux d'évolution et pourcentage d'évolution

Définition 1 : On appelle **taux d'évolution** T de la quantité Q_0 à la quantité Q_1 le nombre :

$$T = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

Propriété 1 : Si t est le pourcentage d'évolution de Q_0 à Q_1 et T le taux d'évolution de Q_0 à Q_1 alors :

$$T = \frac{t}{100}$$

Démonstration : Taux d'évolution et pourcentage d'évolution

On appelle $Q_0 \neq 0$ la quantité initiale et Q_1 la quantité finale augmentée de t %.

D'après la propriété 1, l'augmentation est égale à $\frac{t}{100} \times Q_0$ donc $Q_1 = Q_0 + \frac{t}{100} \times Q_0$.

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 + \frac{t}{100} \times Q_0 \iff Q_1 - Q_0 = \frac{t}{100} \times Q_0 \\ &\iff (Q_1 - Q_0) \times \frac{1}{Q_0} = \frac{t}{100} \times \cancel{Q_0} \times \frac{1}{\cancel{Q_0}} \\ &\iff \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{t}{100} \text{ donc } T = \frac{t}{100} \end{aligned}$$

Conséquence : En utilisant la propriété 3, on obtient : $Q_1 = (1 + T)Q_0$

Méthode : Taux d'évolution et pourcentage d'évolution

Calculer le taux d'évolution et le pourcentage d'évolution en pourcentage d'un prix qui passe de 20 € à 45 €.

$$P_0 = 20 \text{ €} \xrightarrow{T} P_1 = 45 \text{ €}$$
$$T = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{45 - 20}{20} = 1,25 \text{ et } T = \frac{t}{100} \text{ donc } t = 100 \times T = 100 \times 1,25 = 125 \text{ (\%)}$$

Remarque :

- Lors d'une augmentation $T > 0$ et lors d'une réduction $T < 0$.
- Les quantités doivent être exprimées dans la même unité.

II - Évolutions successives

Propriété 2 :

- Si T_1 est le taux d'évolution de Q_0 à Q_1 , et T_2 le taux d'évolution de Q_1 à Q_2 alors :

$$Q_2 = (1 + T_1)(1 + T_2)Q_0$$

- Si T est le taux d'évolution de Q_0 à Q_2 alors $1 + T = (1 + T_1)(1 + T_2)$.

Méthode : Taux d'évolution global

Un article augmente de 20 % puis diminue de 20 %. Calculer son pourcentage d'évolution global t .

$$P_0 \xrightarrow{T_1 = 0,2} P_1 \xrightarrow{T_2 = -0,2} P_2$$
$$\xrightarrow{T}$$

$$1 + T = (1 + T_1)(1 + T_2) = (1 + 0,2)(1 - 0,2) = 0,96 \text{ donc } T = 0,96 - 1 = -0,04$$
$$\text{donc } t = T \times 100 = -0,04 \times 100 = -4 \text{ (\%)}$$

III - Évolution réciproque

Définition 2 : On appelle taux d'évolution réciproque de la quantité Q_0 à la quantité Q_1 le nombre :

$$T' = \frac{Q_0 - Q_1}{Q_1}$$

Propriété 3 : Si T est le taux d'évolution de Q_0 à Q_1 et T' le taux d'évolution réciproque de Q_0 à Q_1 alors :

$$1 + T' = \frac{1}{1 + T}$$

Démonstration : Taux d'évolution réciproque

$$\begin{aligned} 1 + T' &= \frac{1}{1 + T} \iff (1 + T') \times (1 + T) = 1 \\ (1 + T') \times (1 + T) &= \left(1 + \frac{Q_0 - Q_1}{Q_1}\right) \left(1 + \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}\right) \\ &= \left(\frac{Q_1}{Q_1} + \frac{Q_0 - Q_1}{Q_1}\right) \left(\frac{Q_0}{Q_0} + \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}\right) \\ &= \left(\frac{\cancel{Q_1} + Q_0 - \cancel{Q_1}}{Q_1}\right) \left(\frac{\cancel{Q_0} + Q_1 - \cancel{Q_0}}{Q_0}\right) \\ &= \left(\frac{Q_0}{Q_1}\right) \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right) = \frac{\cancel{Q_0} \times \cancel{Q_1}}{\cancel{Q_1} \times \cancel{Q_0}} = 1 \end{aligned}$$

Méthode : Taux d'évolution réciproque

Un article augmente de 20 %. Calculer le pourcentage d'évolution réciproque t' .

$$P_0 \xrightleftharpoons[T']{T = 0,2} P_1$$

$$\begin{aligned} 1 + T' &= \frac{1}{1 + T} = \frac{1}{1 + 0,2} = \frac{1}{1,2} \quad \text{donc} \quad T' = \frac{1}{1,2} - 1 = -\frac{1}{6} \approx -0,17 \\ \text{donc } t' &= 100 \times T' \approx -17 (\%) \end{aligned}$$

SÉRIES STATISTIQUES À UNE VARIABLE

I - Les indicateurs de dispersion

Définition 1 : La **médiane** Me est la valeur qui partage la série en 2 groupes tels que :

- 50 % au moins des valeurs sont inférieures ou égales à Me
- 50 % au moins des valeurs sont supérieures ou égales à Me .

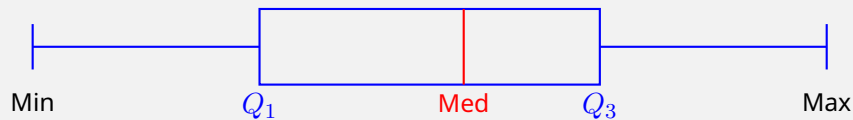
Remarque : La médiane est la valeur centrale de la série.

Définition 2 :

- Le **premier quartile** est la valeur Q_1 qui partage la série en 2 groupes tels que :
 - 25 % au moins des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1
 - 75 % au moins des valeurs sont supérieures ou égales à Q_1 .
- Le **troisième quartile** est la valeur Q_3 qui partage la série en 2 groupes tels que :
 - 75 % au moins des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3
 - 25 % au moins des valeurs sont supérieures ou égales à Q_3 .

Définition 3 :

- On appelle **intervalle interquartile** l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.
- On appelle **écart interquartile** la différence $Q_3 - Q_1$.
- On appelle **diagramme en boîte** le schéma ci-dessous réalisé à l'échelle :



Remarque : L'intervalle interquartile mesure la dispersion de la série. En effet, il contient environ 50 % des valeurs de la série.

II - Les indicateurs de tendance centrale

Étude de la série statistique ci-dessous :

Valeur x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Effectif n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Définition 4 : On appelle **moyenne** d'une série statistique, notée $\bar{x}$, le nombre :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_k \times x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Définition 5 : On appelle **écart-type** d'une série statistique noté σ , le nombre :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}}$$

Remarque : L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

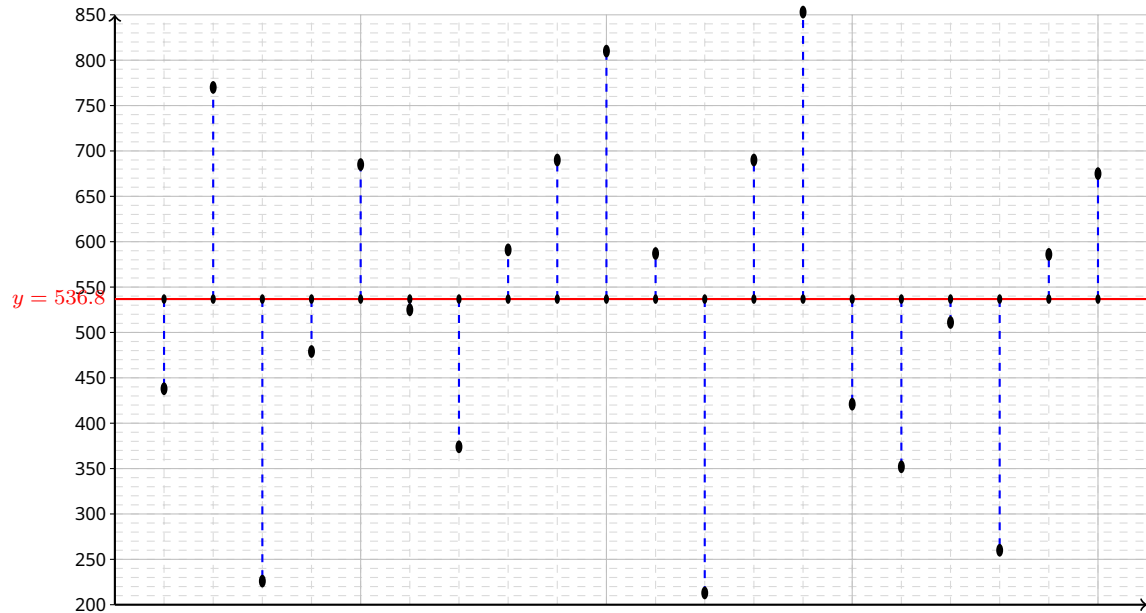
Plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées et moins la moyenne est représentative des valeurs de la série.

Explication : de l'écart-type Le comptable d'une entreprise de dépannage a relevé le kilométrage de chaque véhicule pendant une semaine.

On a obtenu les nombres suivants, en kilomètres :

438	770	226	479	685	525	374	591	690	810
587	213	690	853	421	352	511	260	586	675

On a représenté toutes les valeurs de la série sur le graphique ci-dessous, ainsi que l'écart entre la moyenne et chaque valeur (traits en pointillés bleus). L'écart-type calcule la moyenne des longueurs des segments en pointillés bleus, c'est-à-dire l'écart moyen des valeurs par rapport à la moyenne.



Propriété 1 :

- Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique de moyenne $\bar{x}$ un même nombre a alors la moyenne de la série obtenue est $\bar{x} + a$.
- Si on multiplie toutes les valeurs d'une série statistique de moyenne $\bar{x}$ par un même nombre b alors la moyenne de la série obtenue est $\bar{x} \times b$.

Démonstration :

- On ajoute a à toutes les valeurs de la série.

Valeur x_i	$x_1 + a$	$x_2 + a$	$\dots$	$x_k + a$
Effectif n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Calcul de la moyenne :

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \frac{n_1 \times (x_1 + a) + n_2 \times (x_2 + a) + \dots + n_k \times (x_k + a)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \frac{n_1 x_1 + n_1 a + n_2 x_2 + n_2 a + \dots + n_k x_k + n_k a}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k + n_1 a + n_2 a + \dots + n_k a}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} + \frac{n_1 a + n_2 a + \dots + n_k a}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \bar{x} + \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k) \times a}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \bar{x} + \frac{\cancel{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)} \times a}{\cancel{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)} \times 1} \\
 &= \bar{x} + a
 \end{aligned}$$

- On multiplie toutes les valeurs de la série par b .

Valeur x_i	$x_1 \times b$	$x_2 \times b$	$\dots$	$x_k \times b$
Effectif n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Calcul de la moyenne :

$$\begin{aligned}
 \bar{Y} &= \frac{n_1 \times (x_1 \times b) + n_2 \times (x_2 \times b) + \dots + n_k \times (x_k \times b)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \frac{b \times (x_1 \times n_1) + b \times (x_2 \times n_2) + \dots + b \times (x_k \times n_k)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= \frac{b \times (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= b \times \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\
 &= b \times \bar{x}
 \end{aligned}$$

III - Tableau croisé de deux caractères

Un tableau croisé de deux caractères comporte les valeurs de deux caractères et leurs effectifs.

Explication : Tableau croisé d'effectifs

Dans une classe de 35 élèves, 16 font du ski, 11 font du surf et 4 pratiquent les 2 sports.

On note les caractères A : "L'élève fait du ski" et B : "L'élève fait du surf".

	A	$\bar{A}$	Total
B	$A \cap B : 4$	$\bar{A} \cap B : 7$	B : 11
$\bar{B}$	$A \cap \bar{B} : 12$	$\bar{A} \cap \bar{B} : 12$	$\bar{B} : 24$
Total	A : 16	$\bar{A} : 19$	35

Définition 6 : On appelle fréquence marginale de A, notée f_A :

$$f_A = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif total}}$$

Explication : Calcul de fréquence marginale

La fréquence marginale des élèves qui font du ski est $f_A = \frac{16}{35}$.

Définition 7 : On appelle fréquence conditionnelle de A sachant B, notée $f_B(A)$:

$$f_B(A) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de B}}$$

Explication : Calcul de fréquence conditionnelle

La fréquence conditionnelle $f_B(A)$ est la fréquence des élèves qui font du ski parmi ceux qui font du surf.

$$f_B(A) = \frac{4}{11}$$

I - Vocabulaire

Définition 1 : On appelle **expérience aléatoire** une expérience qui vérifie les 2 conditions suivantes :

- 1 - Tous les résultats possibles sont connus
- 2 - On ne sait pas à l'avance quel résultat va se produire.

Étude d'un cas particulier :

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note le nombre obtenu sur la face supérieure.

- Tous les résultats possibles sont connus : il s'agit de 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- On ne peut pas savoir à l'avance quel résultat on va obtenir.

C'est donc une expérience aléatoire.

Définition 2 : On appelle **issue** un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Dans l'exemple :

Il y a 6 issues : il s'agit de 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Définition 3 : On appelle **univers**, noté Ω , l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Dans l'exemple :

L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 4 : On appelle **évènement** un ensemble d'issues.

Dans l'exemple :

- Soit A l'évènement "Obtenir un nombre pair"; il est composé des issues 2, 4 et 6.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

- Soit B l'évènement "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 2"; il est composé des issues 2, 3, 4, 5, 6.

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

II - Utilisation du langage ensembliste

Notation :

- Une issue e , aussi appelée **évènement élémentaire**, est un **élément** de Ω . On note $e \in \Omega$.
- Un évènement A est un **sous-ensemble** de l'univers Ω . On dit que A est **inclus** dans Ω et on note $A \subset \Omega$.

Définition 5 : On appelle **évènements incompatibles** des évènements qui ne peuvent pas se produire simultanément.

Dans l'exemple :

Soit C l'évènement "Faire 6"; $C = \{6\}$.

Soit D l'évènement "Faire un nombre inférieur strictement à 3"; $D = \{1, 2\}$.

Les évènements C et D n'ont aucune issue commune; ils sont donc incompatibles.

Notation :

- Lorsque 2 ensembles n'ont aucun élément en commun, on dit que leur intersection est un ensemble vide. L'**ensemble vide** se note $\emptyset$. Le symbole de l'**intersection** est $\cap$.
- Si 2 évènements C et D sont incompatibles, on note donc $C \cap D = \emptyset$.

Vocabulaire :

- Toutes les issues appartiennent à l'univers Ω donc on appelle Ω l'**évènement certain**.
- L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucune issue donc on appelle $\emptyset$ l'**évènement impossible**.

Définition 6 : On appelle **évènement contraire** d'un évènement A, l'évènement noté $\overline{A}$ composé de toutes les issues n'appartenant pas à A.

Dans l'exemple :

- Soit A l'évènement "Faire un nombre pair" : $A = \{2, 4, 6\}$
d'où $\overline{A}$ est l'évènement "Ne pas faire un nombre pair" donc $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.
- Soit B l'évènement "Faire un nombre supérieur ou égal à 2" : $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
d'où $\overline{B}$ est l'évènement "Faire un" donc $\overline{B} = \{1\}$.

Propriété 1 : Pour tous évènements A, B :

L'évènement **A ou** l'évènement **B** est l'évènement $A \cup B$.

L'évènement **A et** l'évènement **B** est l'évènement $A \cap B$.

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \overline{A} = \Omega.$$

Dans l'exemple :

Soit A l'évènement "Faire un nombre pair"; $A = \{2, 4, 6\}$
et D l'évènement "Faire un nombre inférieur strictement à 3"; $D = \{1, 2\}$.
A ou D est constitué des issues contenues dans A et dans D; $A \cup D = \{1, 2, 4, 6\}$.
A et D est constitué des issues communes à A et D; $A \cap D = \{2\}$.

I - Probabilité d'un évènement

1 - Notion de probabilité

La probabilité d'un évènement est la fréquence de réalisation de cet évènement lors d'un grand nombre de répétition d'une même expérience aléatoire.

Dans l'exemple :

Si on lance un dé à 6 faces un très grand nombre de fois, on va observer que la fréquence d'apparition de chaque face est égale à 1 sur 6.

Définition 1 :

Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

Propriété 1 :

En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$.

Dans l'exemple :

L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et contient 6 issues.

Soit l'évènement A "Faire un nombre pair"; $A = \{2, 4, 6\}$ contient 3 issues.

$$p(A) = \frac{3}{6} = 0,5$$

Soit l'évènement B "Faire un nombre supérieur ou égal à 2"; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ contient 5 issues.

$$p(B) = \frac{5}{6} \approx 0,83$$

Conséquence :

- La probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1.
- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

2 - Loi de probabilité

Définition 2 :

Soit Ω l'univers fini associé à une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est donner les probabilités p_i de chaque issue x_i de Ω .

On regroupe ces résultats dans un tableau :

issue x_i	x_1	x_2	...	x_n
probabilité p_i	p_1	p_2	...	p_n

Dans l'exemple :

La probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{6}$.

issue	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On vérifie bien que :

- chaque probabilité a une valeur comprise entre 0 et 1.
- la somme des probabilités de chaque issue est égale à 1 $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1\right)$.

3 - Propriétés

Propriété 2 :

- Pour tous évènements A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Pour tout évènement A, $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

Remarque : Si les évènements A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Dans l'exemple :

Soit A l'évènement "Faire un nombre pair" : $A = \{2, 4, 6\}$ donc $p(A) = \frac{3}{6}$

et D l'évènement "Faire un nombre inférieur strictement à 3" : $D = \{1, 2\}$ donc $p(D) = \frac{2}{6}$

$A \cup D = \{1, 2, 4, 6\}$ donc $p(A \cup D) = \frac{4}{6}$

$A \cap D = \{2\}$ donc $p(A \cap D) = \frac{1}{6}$

donc $p(A) + p(D) - p(A \cap D) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = p(A \cup D)$

II - Modéliser avec un tableau ou un arbre

1 - Avec un tableau

Tableau à double entrée :

On lance 2 dés identiques et on note la somme obtenue. Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.

On note tous les tirages possibles lors du jet des 2 dés dans le tableau ci-dessous.

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a 36 tirages possibles. $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Probabilité de chaque issue :

$$p(2) = \frac{1}{36} = p(12); p(3) = \frac{2}{36} = p(11); p(4) = \frac{3}{36} = p(10); p(5) = \frac{4}{36} = p(9); p(6) = \frac{5}{36} = p(8); p(7) = \frac{6}{36}.$$

Loi de probabilité :

issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

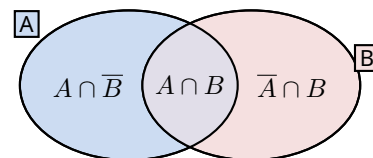
On constate que ce n'est pas une situation d'équiprobabilité.

Tableau (additif) à double entrée :

Dans une classe de 35 élèves, sachant que 16 font du ski, 11 font du surf et 4 pratiquent les 2 sports, combien d'élèves ne pratiquent aucun sport?

On considère les événements A : "Faire du ski" et B : "Faire du surf".

	A	$\bar{A}$	Total
B	$p(A \cap B) = \frac{4}{35}$	$p(\bar{A} \cap B) = \frac{7}{35}$	$p(B) = \frac{11}{35}$
$\bar{B}$	$p(A \cap \bar{B}) = \frac{12}{35}$	$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{12}{35}$	$p(\bar{B}) = \frac{24}{35}$
Total	$p(A) = \frac{16}{35}$	$p(\bar{A}) = \frac{19}{35}$	1



$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{12}{35} \text{ donc il y a 12 élèves qui ne pratiquent aucun sport.}$$

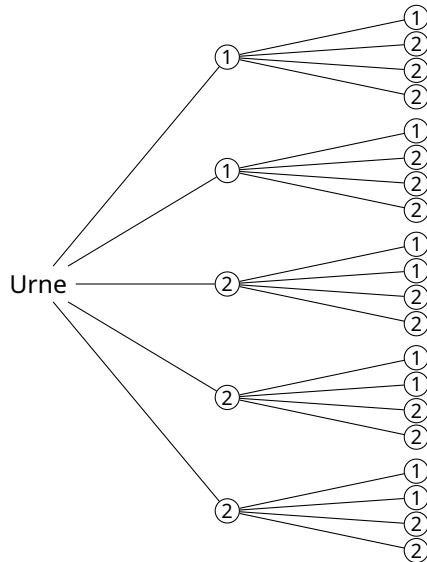
2 - Avec un arbre simple

Arbre simple (des choix) :

Une urne contient 5 boules identiques numérotées 1 ou 2. On tire successivement deux boules de l'urne sans remise.

- 1) Quelle est la probabilité p_1 de tirer 2 boules ayant le numéro 1 ?
- 2) Quelle est la probabilité p_2 de tirer exactement une boule ayant le numéro 2 ?
- 3) Quelle est la probabilité p_3 de tirer au moins une boule ayant le numéro 2 ?

On peut représenter la situation par un arbre (de choix) simple :



Dans cet arbre, un chemin est composé de 2 branches et représente une issue. Il y a au total 20 issues équiprobables.

- 1) Il y a 2 chemins pour lesquels les 2 boules ont le numéro 1 :

$$p_1 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

- 2) Il y a 12 chemins pour lesquels exactement une boule a le numéro 2 :

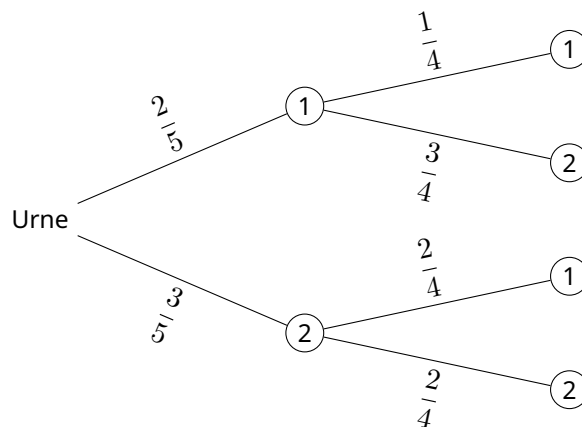
$$p_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

- 3) Il y a 18 chemins pour lesquels au moins une boule a le numéro 2 :

$$p_3 = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

3 - Avec un arbre pondéré

Dans l'exemple précédent :



Propriété 3 :

- Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui composent ce chemin.
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Dans l'exemple précédent :

$$p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$p_2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$p_3 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

III - Probabilité conditionnelle

Définition 3 : Soit A et B deux évènements avec $p(A) \neq 0$. On appelle probabilité de B sachant que A est réalisé le nombre :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarques : • La formule précédente s'écrit aussi $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

• L'évènement $A \cap B$ est réalisé lorsque l'évènement A est réalisé et l'évènement B est réalisé.

Propriété 4 : Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$.

Application à l'exemple précédent :

On note les évènements : • A : "La première boule tirée a le numéro 1."
• B : "La deuxième boule tirée a le numéro 1."

1) Que représente l'évènement $\bar{A}$ et $\bar{B}$?

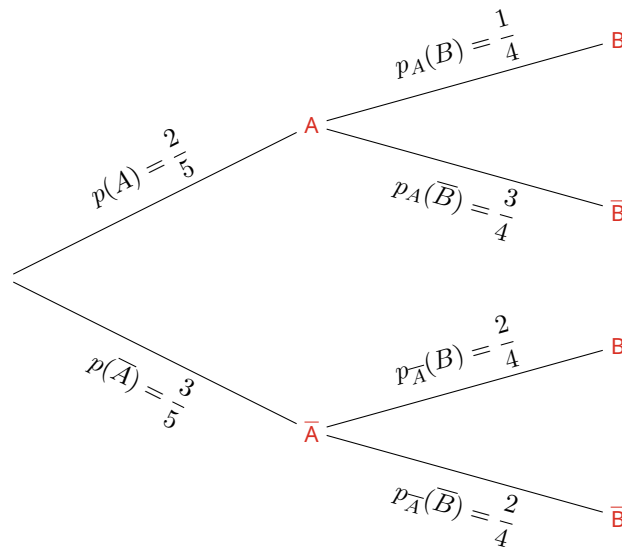
2) Refaire l'arbre pondéré avec les notations introduites dans ce paragraphe.

3) Écrire les formules littérales de p_1, p_2, p_3 calculées auparavant.

1) $\bar{A}$: "La première boule n'a pas le numéro 1." (donc elle a le numéro 2)

$\bar{B}$: "La deuxième boule n'a pas le numéro 1." (donc elle a le numéro 2)

2) Arbre pondéré :



$$3) p_1 = p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$p_2 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(\bar{B}) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$p_3 = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(A) \times p_A(\bar{B}) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B}) \\ = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$