Droites du plan

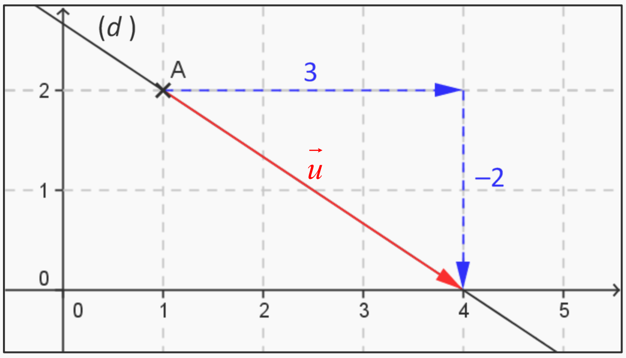
I – Vecteur directeur d'une droite

Définition 1 : Soit A et B deux points distincts d'une droite (d).
Tout vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **vecteur directeur** de la droite (d).

Méthode : Tracer une droite donnée par un point et un vecteur directeur

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, construire la droite (d) passant par le point A(1 ; 2), de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

On place A.
On trace $\vec{u}$ d'origine A.
On trace (d) passant par A et dirigée par $\vec{u}$.



II - Équation cartésienne d'une droite

Propriété 1 : Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite (d).

Démonstration :

Soit (d) une droite passant par un point $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

$$M(x,y)\in(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}\times y_{\vec{u}} - y_{\overrightarrow{AM}}\times x_{\vec{u}} = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)\times\beta-(y-y_A)\times\alpha=0.$$
$$\Leftrightarrow \beta x-\beta x_A-\alpha y+\alpha y_A=0 \Leftrightarrow \beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A=0$$
$$\Leftrightarrow ax+by+c=0 \text{ avec } a=\beta,\ b=-\alpha \text{ et } c=-\beta x_A+\alpha y_A$$

Méthode : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite passant par 2 points

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(-1;4)$ et $B(3;2)$.

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Soit $M(x,y)$, on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$.

$$M(x,y)\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}\times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{AM}}\times x_{\overrightarrow{AB}} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\times(-2)-(y-4)\times 4=0$$
$$\Leftrightarrow -2x-4y+14=0 \Leftrightarrow -x-2y+7=0$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est $-x-2y+7=0$.

Cas particulier : – L'équation de l'axe des abscisses (Ox) est $y = 0$.
– L'équation de l'axe des ordonnées (Oy) est $x = 0$.

Propriété 2 : Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d): $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$.

Démonstration :

Pour raccourcir la démonstration, on se limite au cas où $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Les points $\mathrm{A}\left(0,\dfrac{-c}{b}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{-c}{a},0\right)$ appartiennent à la droite (d) : $ax+by+c=0$.

D'où $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(\dfrac{-c}{a},\dfrac{c}{b}\right)$ est un vecteur directeur de (d).

$x_{\vec{u}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} - y_{\vec{u}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = -b\times\left(\dfrac{c}{b}\right) - a\times\left(\dfrac{-c}{a}\right) = -c+c = 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires.

Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d).

III - Équation réduite d'une droite

Propriété 3 : • Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une **équation réduite** de la forme $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

• Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Dans un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$, toute droite (d) a une équation cartésienne de la forme

$ax+by+c=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a,b)\neq(0,0)$. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

(d) // (Oy) $\Leftrightarrow$ $\vec{j}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow x_{\vec{j}}\times y_{\vec{u}} - y_{\vec{j}}\times x_{\vec{u}} = 0 \Leftrightarrow 0\times a - 1\times(-b) = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

• Si $b \neq 0$ alors $\vec{j}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et $ax+by+c=0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ donc $y = mx+p$ avec $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$.

• Si $b = 0$ alors $\vec{j}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc (d) est parallèle à l'axe des ordonnées et $ax+0y+c=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{a}$ donc $x = k$ avec $k = -\dfrac{c}{a}$.

Vocabulaire : – Le réel m s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.
– Le réel p s'appelle l'**ordonnée à l'origine** ; c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Propriété 4 : Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$.

- Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Un vecteur directeur de (AB) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Démonstration :

- Si $x_A \neq x_B$ alors la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc elle admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

  $A \in (AB) \Leftrightarrow y_A = m x_A + p$ et $B \in (AB) \Leftrightarrow y_B = m x_B + p$

  d'où $p = y_A - m x_A = y_B - m x_B \Leftrightarrow m x_B - m x_A = y_B - y_A$

  $\Leftrightarrow m(x_B - x_A) = y_B - y_A$

  or $x_A \neq x_B$ donc $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- $y = mx + p \Leftrightarrow mx - 1y + p = 0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

Interprétation graphique du coefficient directeur

(O, I, J) est un repère orthonormé.

Le triangle ABC est rectangle en C.

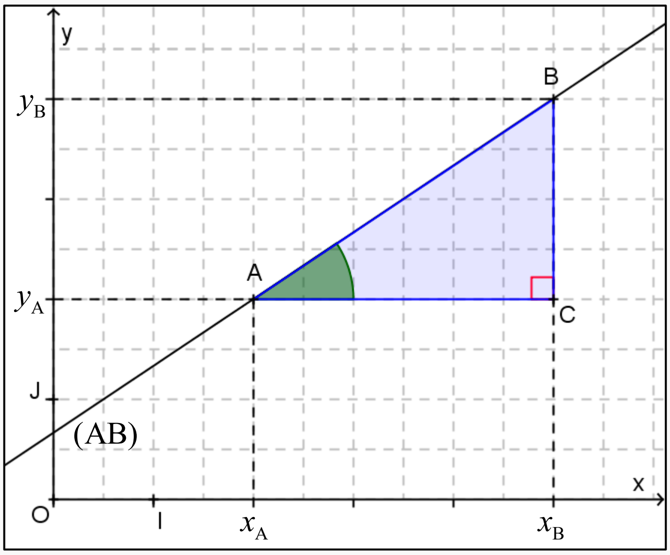
$$\tan\widehat{BAC} = \frac{CB}{CA} = \frac{|y_B - y_A|}{|x_B - x_A|} = |m|$$

donc le coefficient directeur m de la droite détermine la **pente** de la droite.

Si $m > 0$ alors la droite "monte".

Si $m < 0$ alors la droite "descend".

Si $m = 0$ alors la droite est parallèle à (Ox).



Propriété 5 : Les droites $(d) : y = mx + p$ et $(d') : y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

Démonstration :

Si $(d) : y = mx + p$ et $(d') : y = m'x + p'$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').

$(d)\,//\,(d') \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times y_{\vec{u'}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{u'}} = 0 \Leftrightarrow 1 \times m' - m \times 1 = 0 \Leftrightarrow m = m'$.