CHAPITRE 9
Fonctions affines et systèmes d'équations

I- Les fonctions affines

1- Rappels et compléments sur les fonctions linéaires

Définition 1: On appelle fonction linéaire f un "mécanisme" qui à tout nombre x associe un nombre appelé image de x, noté f(x), vérifiant f(x) = ax où a est un nombre différent de 0.

$$\boxed{\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x \text{ avec } \mathrm{a} \neq 0}$$

Représenter graphiquement une fonction, c'est construire les points M de coordonnées $\left(x, \mathrm{f}(x)\right)$.

Propriété 1: La représentation graphique d'une fonction linéaire f: $x \mapsto \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x$, a ≠ 0, est un droite passant par l'origine du repère.

$$\boxed{\text{L'équation de cette droite est } y = \mathrm{a}x}$$

Vocabulaire: Le nombre a est appelé coefficient directeur de la droite d'équation y = ax.
En effet, c'est de lui dont dépend la direction (ou pente) de la droite.

Remarque: Dans le cas où a > 0, si x croît alors y croît; la fonction associée est croissante.
Dans le cas où a < 0, si x croît alors y décroît; la fonction associée est décroissante.

2 - Les fonctions affines

Définition 2: On appelle fonction affine f un "mécanisme" qui à tout nombre x associe un nombre appelé image de x, noté f(x), vérifiant f(x) = ax + b où a est un nombre différent de 0.

$$\boxed{\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} \text{ avec } \mathrm{a} \neq 0}$$

Remarque: Une fonction linéaire est une fonction affine particulière.

Propriété 2: La représentation graphique d'une fonction affine f: $x \mapsto \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, a ≠ 0, est un droite.

$$\boxed{\text{L'équation de cette droite est } y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}}$$

Vocabulaire: Le nombre a est appelé coefficient directeur de la droite d'équation y = ax + b.
Le nombre b est appelé ordonnée à l'origine de la droite d'équation y = ax + b.
En effet, la droite d'équation y = ax + b coupe l'axe des ordonnées du repère au point de coordonnées (0 ; b).

Remarque: Avec une fonction affine $\mathrm{g} : x \mapsto \mathrm{a}x + \mathrm{b}, \mathrm{a} \neq 0$, il y a proportionnalité entre les accroissements de g(x) et les accroissements de x.
Le coefficient de proportionnalité est a.

$$\mathrm{g}(x_2) - \mathrm{g}(x_1) = (\mathrm{a}x_2 + \mathrm{b}) - (\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}) = \mathrm{a}x_2 + \mathrm{b} - \mathrm{a}x_1 - \mathrm{b} = \mathrm{a}x_2 - \mathrm{a}x_1 = \mathrm{a}(x_2 - x_1)$$

II- Système de deux équations à deux inconnues

Dans un repère (O, I, J), une droite (non parallèle à (OJ)) est représentée par une équation de la forme $y = ax + b$.

Trouver le point d'intersection éventuel de deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ revient à trouver les coordonnées du point vérifiant simultanément ces 2 équations.

On dit qu'on résout le système d'équations $\begin{cases} y = ax + b & (E_1) \\ y = cx + d & (E_2) \end{cases}$

Dans la suite, on étudie deux méthodes de résolution de systèmes dans des cas plus généraux.

1 - Méthode de résolution par combinaison

Rappel: On peut ajouter aux deux membres d'une équation un même nombre ou multiplier les deux membres d'une équation par un même nombre.

Etape1: On transforme (E_1) et (E_2) de manière à ce que, si on les ajoute membre à membre, on élimine une inconnue. On choisit , par exemple, d'éliminer l'inconnue x.
Pour éliminer x en ajoutant (E_1) et (E_2) membre à membre, il faut que les coefficients respectifs de x dans (E_1) et (E_2) soient opposés.

Propriété 3: Le système (S) reste inchangé lorsqu'on remplace une de ses 2 équations par la somme des deux équations qui le composent.

Etape 2: On garde (E_1) et on remplace (E_2) par $(E_1) + (E_2)$.

Etape 3: On remplace y par sa valeur dans (E_1).

Etape 4: On résout l'équation (E_1) à une inconnue x.

Remarque: Pour vérifier que le couple (1 ; –2) est solution du système (S), il suffit de vérifier qu'il satisfait simultanément les équations (E_1) et (E_2) initiales.

Le système (S) peut s'écrire $\begin{cases} 2x - 12 = 5y \\ 3x + 5 = -4y \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x - \frac{12}{5} \\ y = \frac{-3}{4}x + \frac{-5}{4} \end{cases}$ ce qui correspond bien à deux équations de droites. Ces deux droites se coupent au point de coordonnées (1 ; –2).

---

2 - Méthode de résolution par substitution

Etape 1: On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une des équations du système ; par exemple, x en fonction de y dans (E_1).

Etape 2: On remplace x par sa valeur (donnée par l'équation (E_1) en fonction de y) dans l'équation (E_2).

Etape 3: On résout (E_2) :

Etape4 : On remplace y par sa valeur dans l'équation (E_1).

Fin du chapitre 09