

CHAPITRE 01

Arithmétique

I- La division euclidienne

Définition 1: Effectuer la division euclidienne d'un entier positif ou nul a par un entier strictement positif b , c'est trouver les deux nombres entiers positifs appelés quotient q et reste r tels que:

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

Remarque: L'autre division s'appelle la division décimale.

Définition 2: On dit que b est un diviseur de a lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à zéro. Il existe un nombre entier positif q tel que:

$$a = b \times q$$

Vocabulaire: Les phrases suivantes ont la même signification.

- b est un diviseur de a .
- b divise a .
- a est un multiple de b .
- a est divisible par b .

Définition 3: On dit que des nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

II- PGCD et algorithme d'Euclide

1 - Définition du PGCD

Définition 4: On appelle PGCD le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers positifs, noté $\text{PGCD}(a, b)$.

Propriété 1: Si a et b sont deux entiers positifs premiers entre eux alors $\text{PGCD}(a, b) = 1$.
Réciproquement,
si $\text{PGCD}(a, b) = 1$ alors les deux entiers positifs a et b sont premiers entre eux.

2 - Recherche du PGCD par soustractions successives

Propriété 2: Si a et b sont deux entiers positifs tels que $a > b$ alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, b)$.

3 - Recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Propriété 3: Soit a et b sont deux entiers positifs:

$$\text{Si } a = b \times q + r \text{ avec } r < b \text{ alors } \text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

Remarque: Si b est un diviseur de a alors dès la 1^{ère} division, on obtient $a = b \times q + 0$; $\text{PGCD}(a, b) = b$.

4 - Utilisation du PGCD

Définition 5: On dit qu'une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Remarque: Rendre une fraction irréductible est très utile lorsqu'on fait des additions ou des soustractions de fractions.

En effet, cela permet d'éviter d'avoir des dénominateurs qui deviennent très grands et donc très difficiles à manipuler dans les calculs.

Fin du chapitre 01
